Lineáris függvények szorzatintegrálja

$f(s)$, $g(s)$ és $h(s)$ lineáris az $[a,b]$ intervallumon.

$$\int_a^b f(s)g(s)ds = (b-a)\cdot\left[\frac{1}{3}(f_a g_a + f_b g_b) + \frac{1}{6}(f_a g_b + f_b g_a)\right]$$

$$\int_a^b f(s)g(s)ds = \frac{(b-a)}{6}\cdot\begin{bmatrix} f_a & f_b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_a \\ g_b \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(s)g(s)h(s)ds = \quad & (b-a)\cdot\left[\frac{1}{4}(f_a g_a h_a + f_b g_b h_b) + \right. \\ & + \frac{1}{12}(f_a g_a h_b + f_a g_b h_a + f_b g_a h_a) \\ & \left. + \frac{1}{12}(f_a g_b h_b + f_b g_a h_b + f_b g_b h_a)\right]\end{aligned}$$

$$\int_a^b f^2(s)g(s)ds = (b-a)\cdot\left[\frac{1}{4}(f_a^2 g_a + f_b^2 g_b) + \frac{1}{12}(f_a^2 g_b + f_b^2 g_a) + \frac{1}{6} f_a f_b (g_a + g_b)\right]$$

$$\int_a^b f^2(s)ds = \frac{b-a}{3}(f_a^2 + f_a f_b + f_b^2)$$

$$\int_a^b f^3(s)ds = \frac{b-a}{4}(f_a^3 + f_a^2 f_b + f_a f_b^2 + f_b^3)$$

Másodfokú függvények szorzatintegrálja

$f(s)$ és $g(s)$ másodfokú az $[a,c]$ intervallumon. $b = \frac{a+c}{2}$

$$\int_a^c f(s)ds = \frac{c-a}{6}(f_a + 4f_b + f_c)$$

$$\int_a^c f(s)g(s)ds = \frac{c-a}{30}\begin{bmatrix} f_a & f_b & f_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix}.$$ Lásd még az F.1. függeléket!

Bázisfüggvények

Lagrange polinomok: $N_j = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{r-r_i}{r_j-r_i}$

Másodfokú bázisfüggvények a [0,0; 0,5; 1,0] pontokhoz:

$$N_1 = 1 - 3r + 2r^2$$
$$N_2 = 4r(1-r)$$
$$N_3 = r(2r-1)$$

Másodfokú bázisfüggvények a [-1; 0; +1] pontokhoz:

$$N_1 = \frac{r}{2}(r-1)$$
$$N_2 = 1 - r^2$$
$$N_3 = \frac{r}{2}(r+1)$$

8 csomópontos bázisfüggvények értéke a középpontban a [-1; 0; +1] koordinátákkal:
sarok: -1/4, élfelező: +1/2

9 csomópontos konstans felületi teher redukálás súlyai [-1; 0; +1] koordinátákkal:
sarok: 1/9, élfelező: 4/9, középpont: 16/9

Tenzor mátrixának transzformációja

GlobToLoc:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \underline{a}^T \\ \underline{b}^T \\ \underline{c}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix}$$

$$\underline{v} = \underline{\underline{T}}^T \, \underline{V}$$

$$\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{K}} \, \underline{\underline{T}}$$

Diagonális K mátrix esetén:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{k}} = \begin{bmatrix} K_x a_x^2 + K_y a_y^2 + K_z a_z^2 & K_x a_x b_x + K_y a_y b_y + K_z a_z b_z & K_x a_x c_x + K_y a_y c_y + K_z a_z c_z \\ K_x a_x b_x + K_y a_y b_y + K_z a_z b_z & K_x b_x^2 + K_y b_y^2 + K_z b_z^2 & K_x b_x c_x + K_y b_y c_y + K_z b_z c_z \\ K_x a_x c_x + K_y a_y c_y + K_z a_z c_z & K_x b_x c_x + K_y b_y c_y + K_z b_z c_z & K_x c_x^2 + K_y c_y^2 + K_z c_z^2 \end{bmatrix}$$

Rugalmas szál differenciálegyenlete, görbület és nyomaték

$$\underline{\underline{I}}\,\underline{\kappa} = \begin{bmatrix} I_y & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \underline{M}$$

$$\underline{\underline{I}}^{-1}\,\underline{M} = \frac{1}{I_y I_z - I_{yz}^2} \begin{bmatrix} I_z & I_{yz} \\ I_{yz} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \underline{\kappa}$$

Konvex keresztmetszet közelítő csavaró másodrendű nyomatéka

$$I_x \approx \frac{A_x^4}{4\pi^2\left(I_y + I_z\right)}$$

von Mises redukált feszültség

$$\sigma_{VM} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right]}$$

LTB Wagner-paraméter

Vörös Gábor értekezése alapján

Wagner-féle nyomaték: a feszültségmező poláris másodrendű nyomatéka az S pontra:

$$M_W = \int_{(A)} \left[(y - y_S)^2 + (z - z_S)^2\right] \sigma_x dA$$

A normálfeszültséget kifejtve:

$$M_W = \int_{(A)} \left[(y - y_S)^2 + (z - z_S)^2\right] \left(\frac{N_x}{A_x} + M_y \frac{zI_z - yI_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}} + M_z \frac{zI_{yz} - yI_y}{I_y I_z - I_{yz}} + \frac{B}{I_\omega}\omega\right) dA$$

Tényezőket képezve:

$$M_W = N_x i_P + M_y \beta_y + M_z \beta_z + B\beta_\omega$$

Felbontva a poláris másodrendű nyomaték zárójelét:

$$M_W = \int_{(A)} \left(y^2 + z^2 - 2y_S y - 2z_S z + y_S^2 + z_S^2\right) \sigma_x dA$$

$$M_W = \int_{(A)} (y^2 + z^2)\sigma_x dA - 2y_S \int_{(A)} y\sigma_x dA - 2z_S \int_{(A)} z\sigma_x dA + (y_S^2 + z_S^2) \int_{(A)} \sigma_x dA$$

Csak normálerőt és hajlítást feltételezve:

$$M_W = \int_{(A)} (y^2 + z^2)\sigma_x dA - 2y_S M_z - 2z_S M_y + (y_S^2 + z_S^2)N_x$$

Innen a súlyponti és a nyírásközépponti béták közötti összefüggés:

$$\beta_y = \beta_{yG} - 2z_S$$
$$\beta_z = \beta_{zG} - 2y_S$$

A görbületekhez tartozó poláris másodrendű nyomatékok:

$$W_y = \int_{(A)} (y^2 + z^2) z dA$$

$$W_z = \int_{(A)} (y^2 + z^2) y dA$$

Az igénybevételekhez tartozó tényezők számítása a görbületi értékekből:

$$\beta_y = \frac{I_z W_y - I_{yz} W_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} - 2z_S$$

$$\beta_z = \frac{-I_{yz} W_y + I_y W_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} - 2y_S$$

Csak bimomentet feltételezve $\sigma_x = \omega$, és mivel ω kiegyensúlyozott, a β_ω nem függ az S pont koordinátáitól:

$$\beta_\omega = \int_{(A)} [(y - y_S)^2 + (z - z_S)^2]\omega dA = \int_{(A)} (y^2 + z^2)\omega dA$$

Egyszeresen szimmetrikus szelvény:

$$\beta_y = \frac{1}{I_y} \int_{(A)} (y^2 + z^2) z dA - 2z_S$$

A z tengely mentén h magasságba eltolt $(b \cdot t)$ téglalapra:

$$\int_{(A)} (y^2 + z^2) z dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (h + z)[y^2 + (h + z)^3]\, dz\ dy =$$

$$= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (h+z)\, dz\ dy + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (h+z)^3\, dz\ dy =$$

$$= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2\, dy \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (h+z)\, dz + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (h^3 + 3h^2 z + 3hz^2 + z^3)\, dz =$$

$$= \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[hz + \frac{z^2}{2}\right]_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} + [y]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[h^3 z + 3h^2\frac{z^2}{2} + 3h\frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4}\right]_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{b^3}{12} ht + b\left(h^3 t + 3h\frac{t^3}{12}\right) = h\big(I_{z'} + h^2 bt + 3I_{y'}\big)$$

Talaj rugalmassági modulusok (Es = ödometrikus rugalmassági modulus)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\mu}{E} & \frac{-\mu}{E} \\ \frac{-\mu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\mu}{E} \\ \frac{-\mu}{E} & \frac{-\mu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_t \\ \sigma_r \\ \sigma_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{50} = E_S \frac{1-\mu+2\mu^2}{1-\mu} = E_S \frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{1-\mu}\ ;\ E_{50} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\ ;\ E_S = \frac{\sigma_t}{\varepsilon_t}$$

GPS koordináták leképezése érintősíkra

Hosszúság: φ
Szélesség: ψ

A globális koordinátarendszer origója a Föld középpontja. A globális XY sík az egyenlítő síkja. A globális Z tengely az Északi Sark felé mutat. A globális X tengely a hosszúsági körhöz igazított, vagyis a globális XZ sík a hosszúsági kör síkja.

A lokális koordinátarendszer origója a $[\varphi_0, \psi_0]$ koordinátájú pont. A lokális x tengely kelet felé mutat. A lokális y tengely észak felé mutat. A lokális z tengely sugárirányú, a földfelszínből kifelé mutat.

GPStoGlob:

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} R\cos\varphi\cos\psi \\ R\sin\varphi\cos\psi \\ R\sin\psi \end{bmatrix}$$

GlobToLoc: A lokális koordinátarendszer egységvektorai:

$$\underline{e_x} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{e_y} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_0 \sin\psi_0 \\ \sin\varphi_0 \cos\psi_0 \\ \cos\psi_0 \end{bmatrix} \qquad \underline{e_z} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_0 \cos\psi_0 \\ \sin\varphi_0 \cos\psi_0 \\ \sin\psi_0 \end{bmatrix}$$

Ha a transzformáció első lépése a hosszúsági koordináta eltolása, vagyis $[\varphi, \psi] \rightarrow [\varphi - \varphi_0, \psi]$, akkor $\varphi_0 = 0$, és a GlobToLoc transzformáció egyszerűbb.

$$\underline{e_x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{e_y} = \begin{bmatrix} \sin\psi_0 \\ 0 \\ \cos\psi_0 \end{bmatrix} \qquad \underline{e_z} = \begin{bmatrix} \cos\psi_0 \\ 0 \\ \sin\psi_0 \end{bmatrix}$$

Függelék

F.1.

$$\int (Ax^2+Bx+C)(ax^2+bx+c)\,dx =$$

$$\int (Aax^4+Abx^3+Acx^2+Bax^3+Bbx^2+Bcx+Cax^2+Cbx+Cc)\,dx =$$

$$\int \left[Aax^4+(Ab+Ba)x^3+(Ac+Bb+Ca)x^2+(Bc+Cb)x+Cc\right]dx =$$

$$\left[Aa\frac{x^5}{5}+(Ab+Ba)\frac{x^4}{4}+(Ac+Bb+Ca)\frac{x^3}{3}+(Bc+Cb)\frac{x^2}{2}+Cc\,x\right]_0^{\ell}$$

$$Aa=\frac{1}{\ell^4}\left[(2V_1-4V_2+2V_3)(2v_1-4v_2+2v_3)\right] \qquad \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -8 & 16 & -8 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 48 & -96 & 48 \\ -96 & 192 & -96 \\ 48 & -96 & 48 \end{bmatrix}$$

$$\ell^3 Ab=(2V_1-4V_2+2V_3)(-3v_1+4v_2-v_3) \qquad \begin{bmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 12 & -16 & 4 \\ -6 & 8 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -90 & 120 & -30 \\ 180 & -240 & 60 \\ -90 & 120 & -30 \end{bmatrix}$$

$$Ba \qquad \begin{bmatrix} -6 & 12 & -6 \\ 8 & -16 & 8 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -90 & 180 & -90 \\ 120 & -240 & 120 \\ -30 & 60 & -30 \end{bmatrix}$$

$$Ac \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ -80 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Bb \qquad \begin{bmatrix} 9 & -12 & 3 \\ -12 & 16 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 180 & -240 & 60 \\ -240 & 320 & -80 \\ 60 & -80 & 20 \end{bmatrix}$$

$$Ca \qquad \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 40 & -80 & 40 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$Bc \qquad \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -90 & & \\ 120 & & \\ -30 & & \end{bmatrix}$$

$$C_b \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -90 & 120 & -30 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$C_c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 60 \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Sigma} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 8 & 4 & -2 \\ 4 & 32 & 4 \\ -2 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$