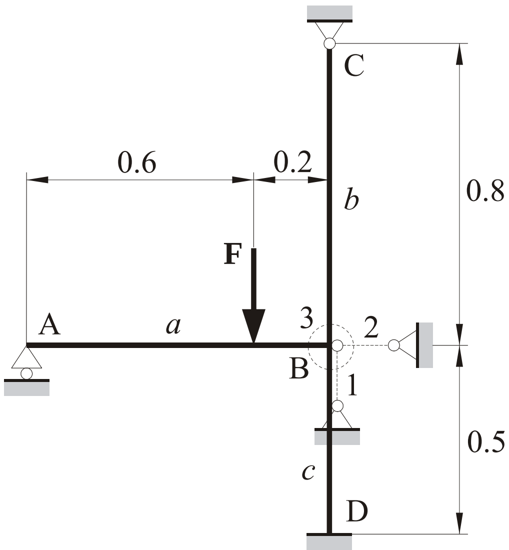
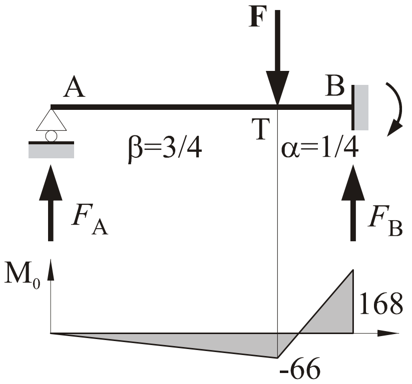


Adatok:
F=1280 N
IE=100AE=const.
hosszúságok: m

A gerenda szerkezet belső B csomópontjának szabadságfoka n=3

A külső terhelésből a törzstartó igénybevétele (csak az a jelű gerenda terhelt) az 1.1 táblázat 2. sora alapján



$$M_B = \frac{\alpha}{2}\left(\beta + \beta^2\right)F\ell_a = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4} + \frac{9}{16}\right)1280 \cdot 0{,}8 = 168 \text{ Nm}$$

$$F_A = \alpha^2\left(\alpha + \frac{3}{2}\beta\right)F = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\frac{3}{4}\right)1280 = 110 \text{ N}$$

$$F_B = \frac{1}{2}\left(2 - 3\alpha^2 + \alpha^3\right)F = \frac{1}{2}\left(2 - 3\frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right)1280 =$$

$$= F - F_A = 1170 \text{ N}$$

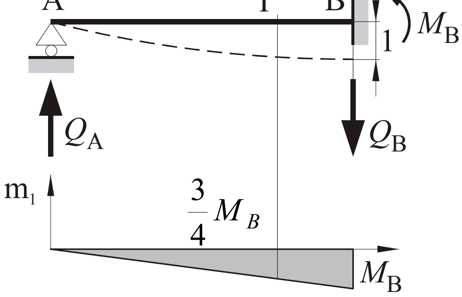
Ezzel a virtuális kényszerekben a külső teherből származó reakciók (pozitív a reakcióerő, ha a virtuális rúd húzott, illetve pozitív a reakciónyomaték, ha forgásértelme az óra járásával egyezik)

$\underline{B_{10}} = -F_B = -1170$ N $\qquad \underline{B_{20}} = 0 \qquad \underline{B_{30}} = M_B = 168$ Nm

A továbbiakban a virtuális kényszerek egységnyi elmozdításából származó reakciókat a virtuális kényszerekben rudanként külön-külön vizsgáljuk (l. 1.2 táblázat), majd a szuperpozíció elve alapján összegezzük.

<u>a jelű gerenda vizsgálata</u>

Az 1-es virtuális kényszer egységnyi pozitív értelmű elmozdítása 4. sor szerint



$$M_B = 3\frac{IE}{\ell_a^2} = 3\frac{IE}{0.8^2} = 4.6875 IE \text{ Nm/m}$$

$$Q_B = Q_A = 3\frac{IE}{\ell_a^3} = 3\frac{IE}{0.8^3} = 5.859375 IE \text{ N/m}$$

Ezzel a virtuális kényszerekben ébredő reakciók

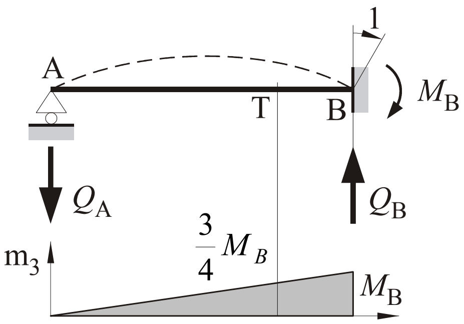
$\underline{B_{11}^a} = Q_B = 5.859375 IE$ N/m $\qquad \underline{B_{21}^a} = 0$

$\underline{B_{31}^a} = -M_B = -4.6875 IE$ Nm/m

A 2-es jelű virtuális kényszer egységnyi elmozdításából reakciók nem keletkeznek (az *A* vég görgősen van megtámasztva)

$\underline{B_{12}^{a}} = 0 \qquad \underline{B_{22}^{a}} = 0 \qquad \underline{B_{32}^{a}} = 0$

A 3-as virtuális kényszer egységnyi elfordításából keletkező reakciók az 5. sor alapján



$$M_B = \frac{3IE}{\ell_a} = 3.75IE \text{ Nm/rad}$$

$$Q_B = Q_A = \frac{3IE}{\ell_a^2} = 4.6875IE \text{ N/rad}$$

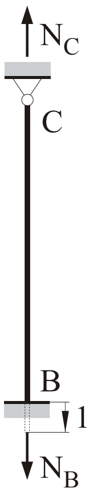
amivel a virtuális kényszerekben a reakciók

$\underline{B_{13}^{a}} = -Q_B = -4.6875IE$ N/rad $\qquad \underline{B_{23}^{a}} = 0$

$\underline{B_{33}^{a}} = M_B = 3.75IE$ Nm/rad

<u>*b* jelű gerenda vizsgálata</u>

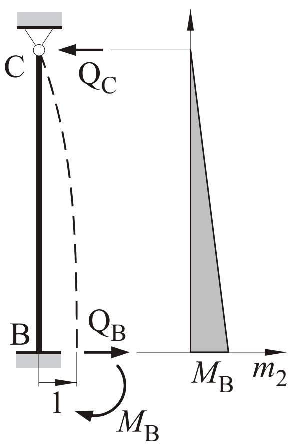
Az 1-es virtuális kényszer egységnyi elmozdításából adódó reakciók 1. sor alapján



$$N_B = N_C = \frac{AE}{\ell_b} = \frac{0.01IE}{0.8} = 0.0125IE \text{ N/m}$$

$\underline{B_{11}^{b}} = N_B = 0.0125IE$ N/m $\qquad \underline{B_{21}^{b}} = 0 \qquad \underline{B_{31}^{b}} = 0$

A 2-es virtuális kényszer egységnyi elmozdításából a reakciók a 4. sor szerint



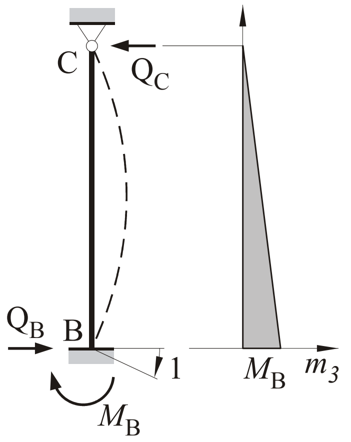
$$M_B = \frac{3IE}{\ell_b^2} = 4.6875IE \text{ Nm/m}$$

$$Q_B = Q_C = \frac{3IE}{\ell_b^3} = 5.859375IE \text{ N/m}$$

$\underline{B_{12}^{b}} = 0 \qquad \underline{B_{22}^{b}} = Q_B = 5.859375IE$ N/m

$\underline{B_{32}^{b}} = M_B = 4.6875IE$ Nm/m

A 3-as virtuális kényszer egységnyi elfordítása esetén az 5. sor szerint a reakciók



$$M_B = \frac{3IE}{\ell_b} = 3.75IE \text{ Nm/rad}$$

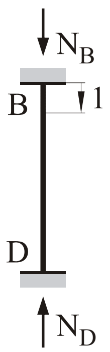
$$Q_B = Q_C = \frac{3IE}{\ell_b^2} = 4.6875IE \text{ N/rad}$$

$$\underline{B_{13}^b} = 0 \qquad \underline{B_{23}^b} = Q_B = 4.6875IE \text{ N/rad}$$

$$\underline{B_{33}^b} = M_B = 3.75IE \text{ Nm/rad}$$

<u>*c* jelű gerenda vizsgálata</u>

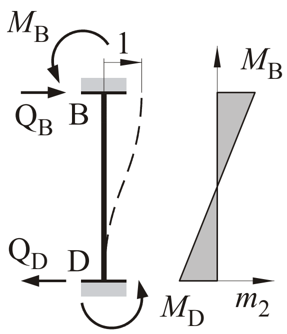
Az 1-es virtuális kényszer egységnyi elmozdításakor keletkező reakciók az 1. sor szerint



$$N_B = N_D = \frac{AE}{\ell_c} = \frac{0.01IE}{0.5} = 0.02IE \text{ N/m}$$

$$\underline{B_{11}^c} = N_B = 0.02IE \text{ N/m} \qquad \underline{B_{21}^c} = 0 \qquad \underline{B_{31}^c} = 0$$

A 2-es virtuális kényszer egységnyi elmozdításából adódó reakciók a 2. sor szerint



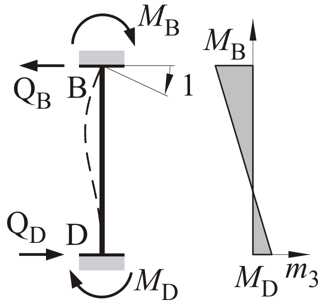
$$M_B = M_D = \frac{6IE}{\ell_c^2} = 24IE \text{ Nm/m}$$

$$Q_B = Q_D = \frac{12IE}{\ell_c^3} = 96IE \text{ N/m}$$

$$\underline{B_{12}^c} = 0 \qquad \underline{B_{22}^c} = Q_B = 96IE \text{ N/m}$$

$$\underline{B_{32}^c} = -M_B = -24IE \text{ Nm/m}$$

A 3-as virtuális kényszer egységnyi elfordításából a 3. sor szerint pedig



$$M_B = \frac{4IE}{\ell_c} = 8IE \text{ Nm/rad}$$

$$Q_B = Q_D = \frac{6IE}{\ell_c^2} = 24IE \text{ N/rad}$$

$$\underline{B_{13}^c} = 0 \qquad \underline{B_{23}^c} = -Q_B = -24IE \text{ N/rad}$$

$$\underline{B_{33}^c} = M_B = 8IE \text{ Nm/rad}$$

Ezek alapján az egyensúlyi egyenletrendszer együtthatói (megjegyezzük, hogy a vegyes indexű szimmetrikus együtthatók számértékre megegyeznek, de mértékegységük különbözhet)

$$\underline{B_{11}} = B_{11}^a + B_{11}^b + B_{11}^c = (5.859375 + 0.0125 + 0.02)IE = 5.891875IE$$

$$\underline{B_{12} = B_{21}} = B_{12}^a + B_{12}^b + B_{12}^c = B_{21}^a + B_{21}^b + B_{21}^c = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\underline{B_{13} = B_{31}} = B_{13}^a + B_{13}^b + B_{13}^c = B_{31}^a + B_{31}^b + B_{31}^c = (-4.6875 + 0 + 0)IE = -4.6875IE$$

$$\underline{B_{22}} = B_{22}^a + B_{22}^b + B_{22}^c = (0 + 5.859375 + 96)IE = 101.859375IE$$

$$\underline{B_{23} = B_{32}} = B_{23}^a + B_{23}^b + B_{23}^c = B_{32}^a + B_{32}^b + B_{32}^c = (0 + 4.6875 - 24)IE = -19.3125IE$$

$$\underline{B_{33}} = B_{33}^a + B_{33}^b + B_{33}^c = (3.75 + 3.75 + 8)IE = 15.5IE$$

$$\underline{B_{10}} = B_{10}^a + B_{10}^b + B_{10}^c = -1170 + 0 + 0 = -1170$$

$$\underline{B_{20}} = B_{20}^a + B_{20}^b + B_{20}^c = 0$$

$$\underline{B_{30}} = B_{30}^a + B_{30}^b + B_{30}^c = 168 + 0 + 0 = 168$$

illetve az egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} B_{10} \\ B_{20} \\ B_{30} \end{bmatrix}$$

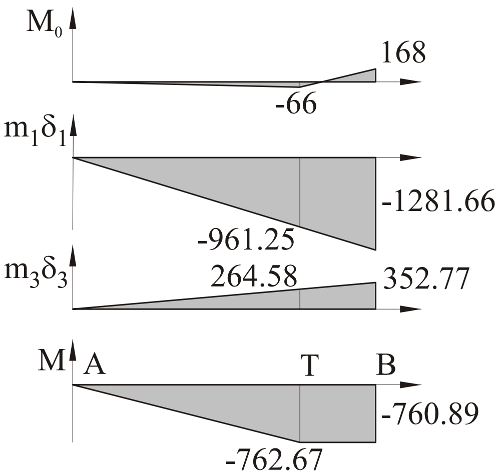
$$IE \begin{bmatrix} 5.891875 & 0 & -4.6875 \\ 0 & 101.859375 & -19.3125 \\ -4.6875 & -19.3125 & 15.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1170 \\ 0 \\ -168 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \delta_1 &= 273.421331/IE \text{ m} \\ \delta_2 &= 17.8360896/IE \text{ m} \\ \delta_3 &= 94.0723852/IE \text{ rad} \end{aligned}$$

Bármely keresztmetszet hajlító igénybevétele a szuperpozíció elve alapján

$$M = M_0 + m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + m_3\delta_3$$

Rúdszakaszonként külön-külön értékelve

<u>*a* jelű gerenda</u>

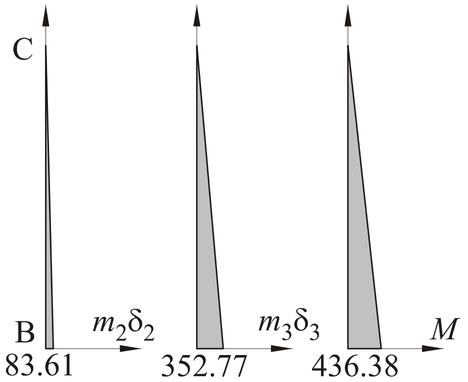


$$M_A = 0$$

$$M_B = 168 + (-4.6875IE)\frac{273.421331}{IE} + 0 + 3.75IE\frac{94.0723852}{IE} = 168 - 1281.66 + 352.77 = -760.89 \text{ Nm}$$

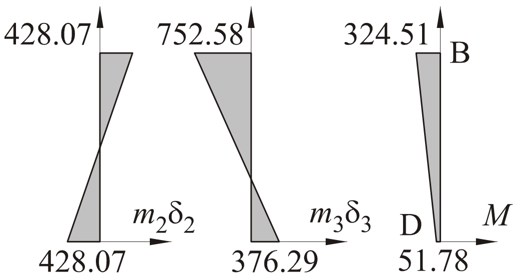
$$M_T = -66 + \frac{3}{4}(-4.6875IE)\frac{273.421331}{IE} + 0 + \frac{3}{4}3.75IE\frac{94.0723852}{IE} = -66 - 961.25 + 264.58 = -762.67 \text{ Nm}$$

b jelű gerenda



$$M_B = 0+0+4.6875IE\frac{17.8360896}{IE}+3.75IE\frac{94.0723852}{IE}=$$
$$=0+0+83.61+352.77=436.38\ \text{Nm}$$
$$M_C = 0$$

c jelű gerenda



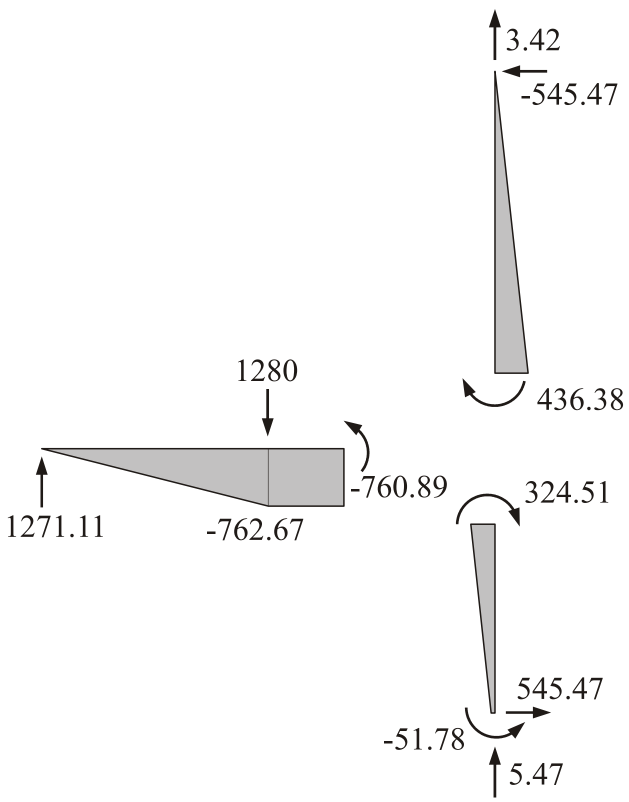
$$M_B = 0+0+(-24IE)\frac{17.8360896}{IE}+8IE\frac{94.0723852}{IE}=$$
$$=0+0-428.07+752.58=324.51\ \text{Nm}$$
$$M_D = 0+0+(-24IE)\frac{17.8360896}{IE}+4IE\frac{94.0723852}{IE}=$$
$$=0+0-428.07+376.29=-51.78\ \text{Nm}$$

Hasonlóképpen határozhatjuk meg a reakcióerőket is (a felfele, illetve a jobbra mutató irányt tekintve pozitívnak)

$$F_A = F_{Ay} = F_A^{(0)} + Q_A^{(1)}\delta_1 + 0 + Q_A^{(3)}\delta_3 =$$
$$=110+5.859375IE\frac{273.421331}{IE}+(-4.6875IE)\frac{94.0723852}{IE}=$$
$$=110+1602.07-440.96=1271.11\ \text{N}$$
$$F_{Dy} = 0+N_D\delta_1+0+0=0.02IE\frac{273.421331}{IE}=5.47\ \text{N}$$
$$F_{Cy} = 0+N_C\delta_1+0+0=0.0125IE\frac{273.421331}{IE}=3.42\ \text{N}$$

$$F_{Cx} = 0+0-Q_C^{(2)}\delta_2-Q_C^{(3)}\delta_3=-5.859375IE\frac{17.8360896}{IE}-4.6875IE\frac{94.0723852}{IE}=$$
$$=-104.51-440.96=-545.47\ \text{N}$$
$$F_{Dx} = 0+0-Q_D^{(2)}\delta_2+Q_D^{(3)}\delta_3=(-96IE)\frac{17.8360896}{IE}+24IE\frac{94.0723852}{IE}=$$
$$=-1712.26+2257.73=545.47\ \text{N}$$

Értelemszerűen a felfele mutató reakcióerők eredője 1280 N, ami a terhelő F erővel tart egyensúlyt, a vízszintes reakcióerők eredője pedig zérus.


3.42
-545.47
436.38
1280
-760.89
324.51
1271.11
-762.67
545.47
-51.78
5.47