Sztochasztikus folyamatok

(segédlet a Szerkezetfárasztás tantárgyhoz)

Készítette:

Dóra Sándor

tudományos segédmunkatárs

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Közlekedésmérnöki Kar
Járműváz- és Könnyűszerkezetek Tanszék

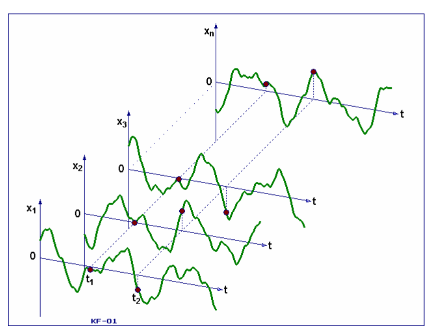
A sztochasztikus folyamat definíciója és értelmezése

Matematikai definíció: $x(t,\omega)$

- t idő, hossz vagy egyéb paraméter a realizáció mentén
- ω véletlen esemény
- x A folyamat értéke a t paraméterű pontban, az ω elemi esemény bekövetkezése esetén

Értelmezések:

- $x_t(\omega)$ valószínűségi változók sokasága
- $x_\omega(t)$ egymást követő valószínűségi változók, amikből összeáll egy függvény
- $x_i(t)$ egy megvalósult realizáció



Egy példa a különböző értelmezésekre

Várható érték

Átlagolás az eseménytérben (egy adott időpontban):

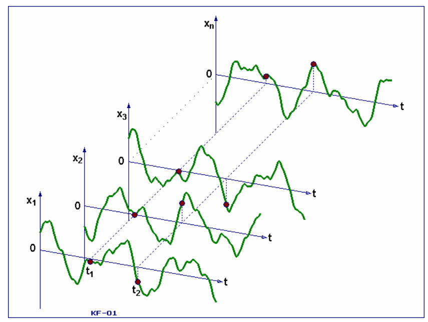
$$m_x(t) = M[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \, p_{x(t)}(\xi)\, d\xi$$

Átlagolás a sokaság mentén (egy adott időpontban):

$$m_x(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i(t)$$

Időbeli átlagolás (egy realizáción):

$$m_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt$$



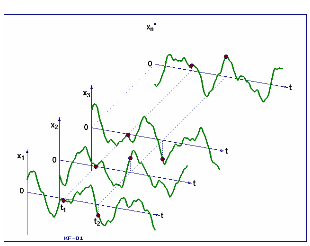
Statisztikai jellemzők

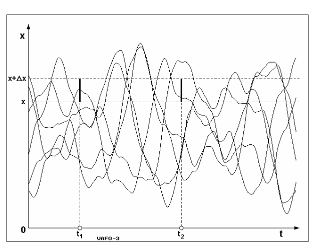
Elsőrendű peremeloszlás-függvény: $P_x(\xi, t) = P_{x(t)}(\xi)$

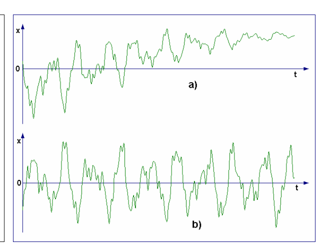
Elsőrendű peremsűrűség-függvény: $p_x(\xi, t) = p_{x(t)}(\xi)$

Várható érték függvény: $m_x(t) = \mathrm{M}[x(t)]$

Szórás: $\sigma_x(t) = \mathrm{M}[x(t) - m_x(t)]^2$







Statisztikai jellemzők

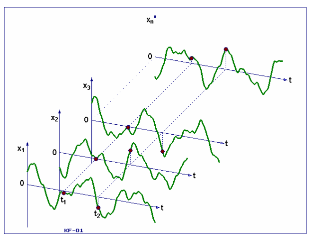
Másodrendű peremeloszlás: $P_x^{(2)}(\xi_1,\xi_2,t_1,t_2)$ $p_x^{(2)}(\xi_1,\xi_2,t_1,t_2)$

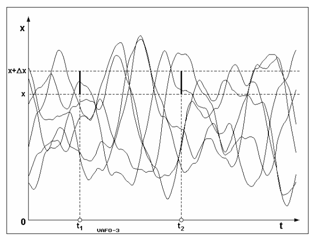
Autokorreláció függvény: $B_x(t_1,t_2)=\mathrm{M}[x(t_1)\cdot x(t_2)]$

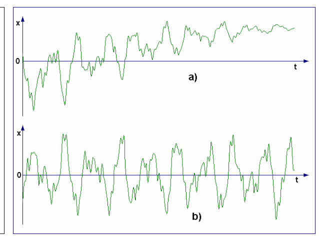
$$B_x(t_1,t_2)=R_x(t_1,t_2-t_1)=R_x(t,\tau)$$

Autokovariancia függvény: $V_x(t_1,t_2)=M[(x(t_1)-m_x(t_1))\cdot(x(t_2)-m_x(t_2))]$

$$V_x(t_1,t_2)=C_x(t_1,t_2-t_1)=C_x(t,\tau)$$







Stacionaritás (statisztikus)

Statisztikai jellemzők időbeli állandósága.

Statisztikai függvények esetén invariancia az időbeli eltolással szemben.

Szigorú stacionaritás

Elsőrendű: $P_x(\xi,t)=P_x(\xi)$ $p_x(\xi,t)=p_x(\xi)$

Másodrendű:

$$P_x^{(2)}(\xi_1,\xi_2,t_1,t_2)=P_x^{(2)}(\xi_1,\xi_2,t_0+t_1,t_0+t_2)$$

$$p_x^{(2)}(\xi_1,\xi_2,t_1,t_2)=p_x^{(2)}(\xi_1,\xi_2,t_0+t_1,t_0+t_2)$$

r-edrendű: $P_x^{(r)}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{t})=P_x^{(r)}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{t}_0+\mathbf{t})$ $p_x^{(r)}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{t})=p_x^{(r)}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{t}_0+\mathbf{t})$

Stacionaritás (statisztikus)

Gyenge stacionaritás

Elsőrendű: $m_x(t) = m_x$

Másodrendű: $m_x(t) = m_x$ $R_x(t,\tau) = R_x(\tau)$ $B_x(t_1,t_2) = B_x(t+t_1, t+t_2)$

Harmadrendű: $m_x(t) = m_x$ $R_x(t,\tau_1,\tau_2) = R_x(\tau_1,\tau_2)$

r-edrendű: $m_x(t) = m_x$ $R_x(t,\boldsymbol{\tau}) = R_x(\boldsymbol{\tau})$

Egységesebben felírva

Elsőrendű: $M[x(t)] = M[x(0)]$

Másodrendű: $M[x(t)x(t+\tau)] = M[x(0)x(\tau)]$

Harmadrendű: $M[x(t)x(t+\tau_1)x(t+\tau_1+\tau_2)] = M[x(0)x(\tau_1)x(\tau_1+\tau_2)]$

r-edrendű: $M[x(t)x(t+\tau_1)\ldots x(t+\tau_1+\ldots+\tau_{r+1})] = \ldots$

Sokaság- és időátlagok

Várható érték

Átlagolás az eseménytérben (egy adott időpontban):

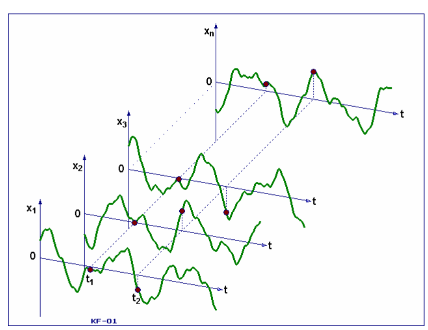
$$m_x = M[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \, p_x(\xi)\, d\xi$$

Átlagolás a sokaság mentén (egy adott időpontban):

$$m_x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i(t)$$

Időbeli átlagolás (egy realizáción):

$$m_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt$$



Sokaság- és időátlagok

Korreláció

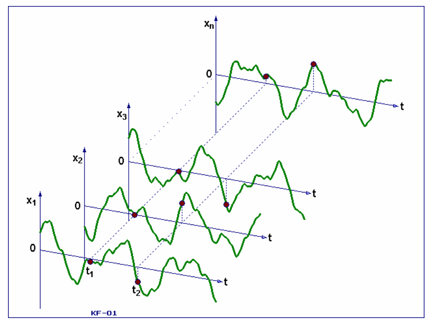
Matematikai definíció: $$R_{xy} = M[xy] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi\eta\, p_{x,y}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

Kísérleti adatokból: $$R_{xy} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

Sztochasztikus folyamatból: $$R_{xx}(\tau) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x(t)x(t+\tau)$$

Autokorreláció függvény

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T-\tau}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$



Ergodicitás

Az időátlagok megegyeznek a sokaságra vett átlagokkal.

Egyszerű példák:

- Konstans folyamat: $x(t,\omega) = \xi(\omega)$
- Valódi véletlen (zaj) folyamat: $x(t,\omega) = \xi_t(\omega)$

Ergodtételek:

- Az r-edrendű peremeloszlásra nézve ergodikus, ha r-edrendben szigorúan stacionárius.

- Ergodicitás a középértékre nézve: $$m_x = \mathrm{M}[x] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{\infty} x(t)dt$$

Feltételek: $m_x(t) = m_x$ $\quad R_x(t,\tau) = R_x(\tau)$ $\quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{+T} |C_x(\tau)| d\tau = 0$

Összefüggések

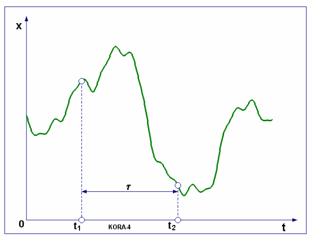
$$
\begin{tikzcd}
x(t) \arrow[r, "(3)"] \arrow[d, "(1)"'] & X(f) \arrow[d, "(4)"] \\
R_x(\tau) \arrow[r, leftrightarrow, "(2)"] \arrow[d, "(5a)"'] & G_x(f) \arrow[d, "(5b)"] \\
R_0(\tau) \arrow[r, leftrightarrow, "(2)"] & G_0(f)
\end{tikzcd}
$$

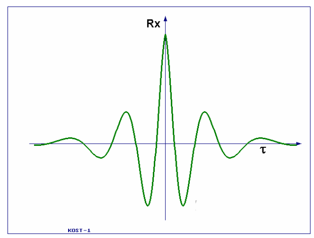
(1)

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot x(t+\tau)\,dt$$

$$x(t) = A\cos(2\pi f t + \varphi)$$

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos 2\pi f t$$





Összefüggések

$$
\begin{tikzcd}
x(t) \arrow[r, "(3)"] \arrow[d, "(1)"'] & X(f) \arrow[d, "(4)"] \\
R_x(\tau) \arrow[r, leftrightarrow, "(2)"] \arrow[d, "(5a)"'] & G_x(f) \arrow[d, "(5b)"] \\
R_0(\tau) \arrow[r, leftrightarrow, "(2)"] & G_0(f)
\end{tikzcd}
$$

(2)

$$S_0(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_0(\tau)e^{-2\pi i f\tau}\,d\tau$$

$$R_0(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_0(f)e^{2\pi i f\tau}\,df$$

$$G_x(f) = 4\int_0^T R_x(\tau)\cos(2\pi f\tau)\,d\tau$$

$$R_x(\tau) = \int_0^{f_{max}} G_x(f)\cos(2\pi f\tau)\,df$$

Összefüggések

$$\begin{tikzcd}
x(t) \arrow[r, leftrightarrow, "(3)"] \arrow[d, "(1)"'] & X(f) \arrow[d, "(4)"] \\
R_x(\tau) \arrow[r, leftrightarrow, "(2)"] \arrow[d, "(5a)"'] & G_x(f) \arrow[d, "(5b)"] \\
R_0(\tau) \arrow[r, leftrightarrow, "(2)"] & G_0(f)
\end{tikzcd}$$

(3)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt \qquad X(f) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2\pi i f t} dt \qquad x(t) = \int_{-f_{\max}}^{+f_{\max}} X(f) e^{2\pi i f t} dt$$

(4)

$$G_x(f) = \frac{2}{T}\left|X(f)\right|^2$$

(5a)

$$R_0(\tau) = \lim_{T\to\infty} R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

(5b)

$$G_0(f) = \lim_{T\to\infty} \mathrm{M}\left[G_x(f)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\mathrm{M}\left[\left|X(f)\right|^2\right]$$

A Taylor-lépték értelmezése

Harmonikus függvény periodusidejének meghatározása időmérés nélkül, a deriváltfüggvény ismeretében:

Függvények:	Amplitúdók:	Periódusidő:
$x(t) = A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\varphi\right)$	$\hat{x} = A$	$T = 2\pi\frac{\hat{x}}{\hat{\dot{x}}}$
$\dot{x}(t) = \frac{2\pi}{T}A\cos\left(2\pi\frac{t}{T}+\varphi\right)$	$\hat{\dot{x}} = 2\pi\frac{A}{T}$	

Általánosítás a szórás segítségével:

$x(t) = A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\varphi\right)$	$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}}A$	$T = 2\pi\frac{\sigma_x}{\sigma_{\dot{x}}}$
$\dot{x}(t) = \frac{2\pi}{T}A\cos\left(2\pi\frac{t}{T}+\varphi\right)$	$\sigma_{\dot{x}} = \sqrt{2}\pi\frac{A}{T}$	

A Taylor-lépték értelmezése

$$T' = 2\pi \frac{\sigma_x}{\sigma_{\dot{x}}} \quad \overset{?}{\longleftrightarrow} \quad \lambda = \frac{\sqrt{2}\sigma_x}{\sqrt{-\ddot{R}_x(0)}}$$

A korrelációfüggvényre vonatkozó deriválási szabályok:

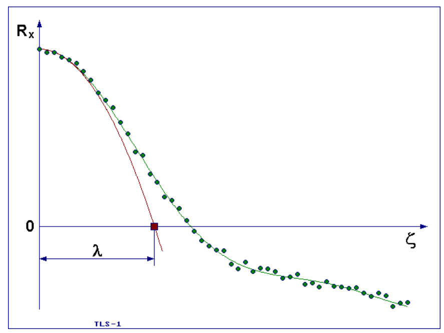
$$R_x(\tau) = R_{xx}(\tau)$$

$$R_{x\dot{x}}(\tau) = \pm \dot{R}_{xx}(\tau)$$

$$R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = -\ddot{R}_{xx}(\tau) \longrightarrow \lambda = \sqrt{2}\frac{\sigma_x}{\sigma_{\dot{x}}}$$

Geometriai értelmezés:

$$R_x(\tau) = \sigma_x \left[1 - \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^2 + \ldots \right]$$ (Taylor-sor)



Az integrál-lépték értelmezése

Kovásznay-képlet:

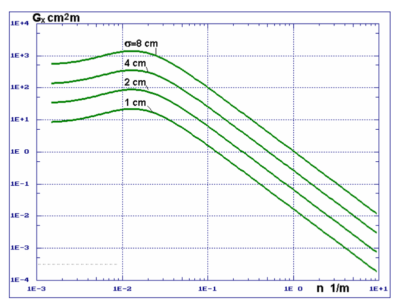
$$G_x(0) = 4L\sigma_x^2$$

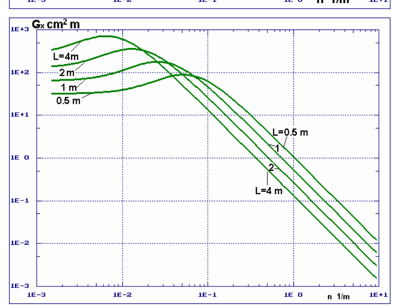
A spektrum meghatározása sávszűréssel:

$$G_x(f) = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{1}{\Delta f} \left[\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t, f, \Delta f)\, dt \right]$$

Kármán-spektrum:

$$G_x(f) = 4L\sigma_x^2 \frac{1 + A(CLf)^2}{\left[1 + (CLf)^2\right]^{\alpha}}$$





Az integrál-lépték értelmezése

Megjegyzések:

- a spektrum és az eredeti függvény alatti terület

- a spektrum és az eredeti függvény nyújtása

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

$$x(ct) \leftrightarrow \frac{1}{c} X\left(\frac{f}{c}\right)$$

$$\frac{1}{c} x\left(\frac{t}{c}\right) \leftrightarrow X(cf)$$

- határozatlansági elv

$$D_t \cdot D_f = \textit{állandó}$$

A spektrál-előállítás elméleti háttere

Integrál-előállítás

$$x(t) = \mathrm{Re}\int_0^\infty e^{2\pi i f t}\, dZ(f); \quad \mathrm{E}\left[Z(f'') - Z(f')\right]^2 = \int_{f'}^{f''} G(f)\, df$$

Számítógépes megvalósítás

Csonkítás és diszkretizálás a frekvencia-tartományban:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k)$$

Csonkítás és diszkretizálás az időtartományban:

$$\left\{x_j = x(hj)\right\}_{j=0}^{m-1}; T = hm$$

Fourier-előállítás

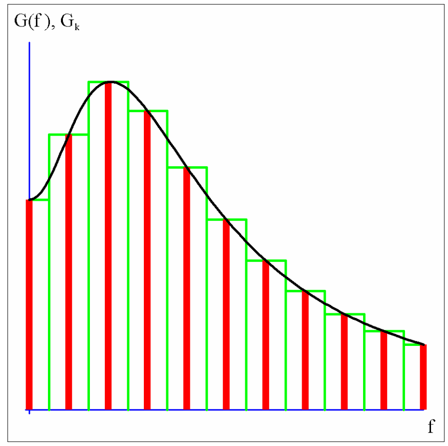
$$x(t)=\sum_{k=0}^{N} a_k \cos(2\pi f_k t+\varphi_k)$$

$$f_k = k\,\Delta f$$

$$a_k=\sqrt{G(f_k)\Delta f}$$

$$\varphi_k \sim \mathrm{E}(-\pi;+\pi)$$

Jellemzők:
- periodicitás
- nemzérus középérték



Frekvencia áthelyezéses eljárás (Shinozuka)

$$x(t)=\sum_{k=1}^{N} a_k \cos(2\pi f_k t+\varphi_k)$$

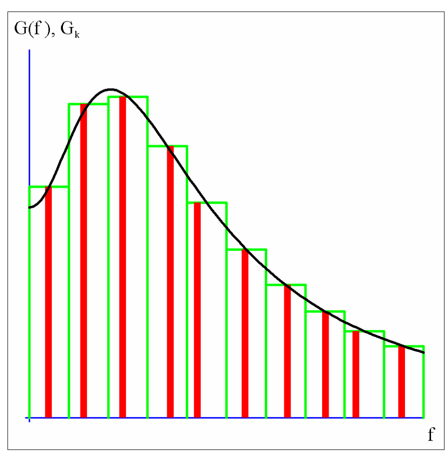
$$f_k=(k-0.5)\Delta f$$

$$a_k=\sqrt{G(f_k)\Delta f}$$

$$f'_k = f_k + \delta f_k$$

$$\delta f_k \sim \mathrm{E}\left(-\frac{\Delta f}{2};+\frac{\Delta f}{2}\right)$$

$$\varphi_k \sim \mathrm{E}(-\pi;+\pi)$$



Összefűzéses módszer (Zobory)

Az ℓ. szegmenshez tartozó végtelen hosszú, periodikus függvény:

$$w_\ell(t) = \sum_{k=0}^{N} \sqrt{G(k\,\Delta f)\Delta f}\,\cos\left(2\pi\,k\Delta f\,t - \varphi_{k,\ell}\right)$$

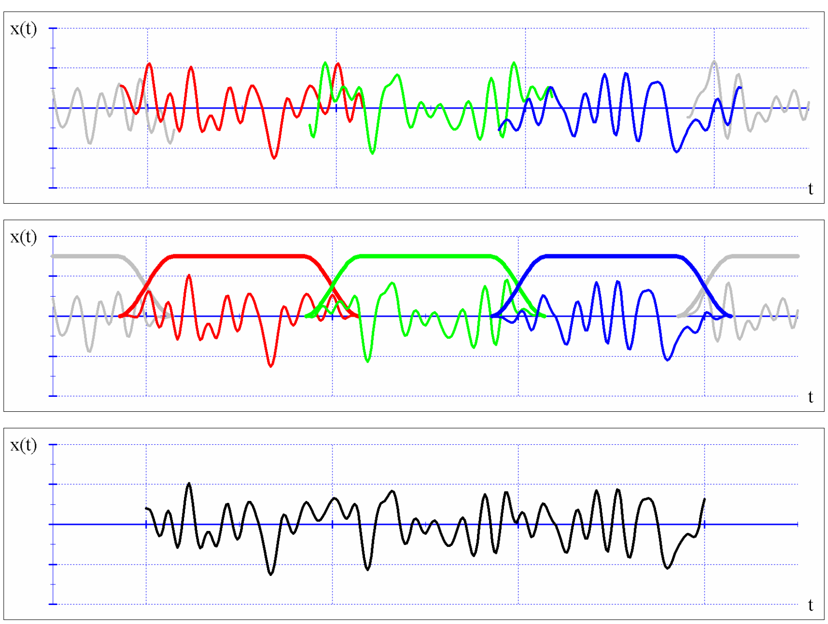
Eltolt burkolóval kivágott véges hosszúságú szegmens:

$$x_{S,\ell}(t) = u(t - \ell\,\Delta T)\,w_\ell(t); \quad \Delta T = 1/\Delta f$$

Összefűzött szegmensek:

$$x(t) = \sum_{\ell=-\Delta m_S}^{m_S - 1 + \Delta m_S} u(t - \ell\,\Delta T)\,w_\ell(t); \quad T = m_S \Delta T$$

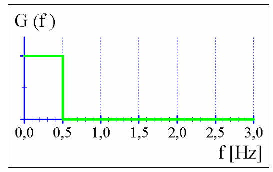
Az összefűzéses módszer szemléltetése



Mintavételezés, interpoláció, rekonstrukció

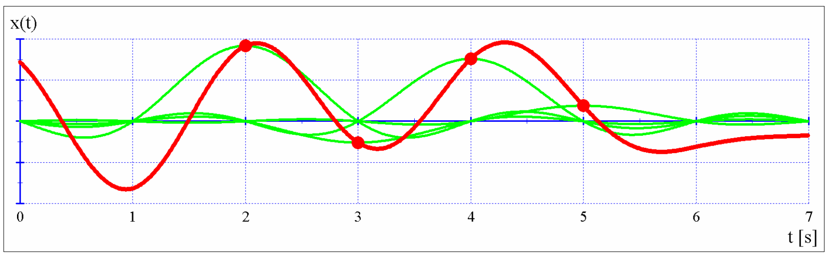
Shannon-Nyquist-Whitaker-féle mintavételezési tétel felülről sávkorlátozott spektrumú függvények esetén

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{t}{2W}\right) \mathrm{sinc}(2Wt - j)$$



$$\mathrm{sinc}(\alpha) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}$$

Példa: $W = 0{,}5\,\mathrm{Hz}$



Irodalom

Bendat, J. S. – Piersol, A. G.: Random Data: Analysis and Measurement Procedures, John Wiley & Sons Inc., 1971, ISBN 0-471-06470-X

Bendat, J.S. – Piersol, A.G.: Engineering Application of Correlation and Spectral Analysis, John Wiley & Sons Inc., 1971, ISBN 0-471-06470-X

Marks, R.J.: Introduction to Shannon Sampling and Interpolation theory, Springer, 1991, ISBN 0-387-97391-5
http://web.ecs.baylor.edu/faculty/marks/REPRINTS/1999_IntroductionToShannonSamplingAndInterpolationTheory.pdf

Rice, S.O.: Mathematical Analysis of Random Noise, Bell System Technical Journal, vol. , pp. -, 19

Shannon, C.E.: Communication in the Presence of Noise, Proc. IRE, vol. 37, pp. 10-21, 1949

Shinozuka, M. – Jan, C.M.: Digital Simulation of Random Processes and its Applications, Journal of Sound and Vibration, vol. 25, pp. 111-128, 1972

Shinozuka, M.: Simulation of Multivariate and Multidimensional Random Processes, Journal of the Acoustical Society of America, vol. 49, pp. 357-368, 1972