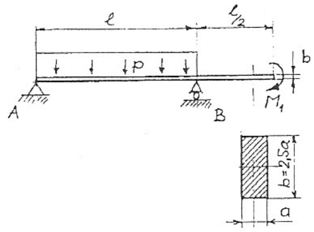
2007/2008/01 01.V.

MECHANIKA 2 (KOJKA102) 2008.01.07.

1. Feladat *(15 pont)*
Végezze el az ábrán látható kéttámaszú tartó szilárdsági vizsgálatát az alábbiak szerint.

Adott mennyiségek:

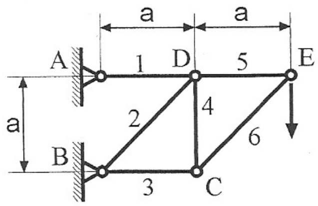


$p = 6\frac{kN}{m}$, $M_1 = 0.5\,kNm$, $\sigma_{meg} = 120\,MPa$,

$l = 1m$, $E = 2\cdot 10^5\ MPa$.

(a) Számítsa ki a szerkezet reakcióerőit.
(b) Méretezze a tartót hajlításra $(a = ?)$.
(c) Határozza meg $\tau_{\max}$ helyét és nagyságát.

2. Feladat *(20 pont)*
A rácsos tartó E pontját terheli a rajzolt F nagyságú erő. Mindegyik rúd húzó merevsége azonos, nagysága AE.

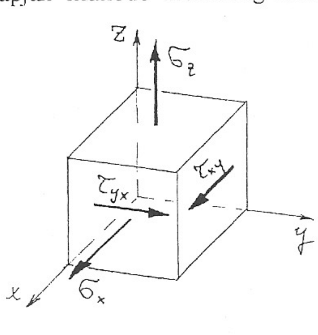


Adatok: AE=áll.; a; F paraméterként adottak

Kérdések:

Határozza meg paraméteresen a C csuklópont függőleges elmozdulásának irányát és nagyságát!

3. Feladat *(15 pont)*
Egy rugalmas test egy pontja környezetében a feszültségi állapotot a vázolt elemi kocka lapján működő feszültség-összetevők határozzák meg. Ismerjük továbbá az alakváltozási tenzor két elemét is. Adott mennyiségek:



$\sigma_x = 100\,MPa$, $\gamma_{xy} = 6\cdot 10^{-4}$, $\tau_{xy} = 48\,MPa$.

$\sigma_z = 80\,MPa$, $\varepsilon_y = -2.5\cdot 10^{-4}$.

(a) Határozza meg az anyagjellemzőket.
(b) Számítsa ki az alakváltozási tenzor ismeretlen elemeit.

4. Feladat *(15 pont)*

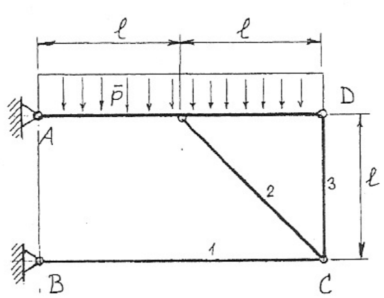
Egy rugalmas test adott pontja elemi környezetének alakváltozási állapotát az $\underline{\underline{A}}$ tenzor írja le. Adott mennyiségek:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -7.5 \\ 0 & 1.4 & 0 \\ -7.5 & 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}, \qquad G = 26.5\,GPa; \quad m = 3.$$

(a) Határozza meg a feszültségtenzort.
(b) Számítsa ki a főfeszültségeket.
(c) Számítsa ki a HMH elmélet szerinti σ_{egy} egyenértékű feszültséget.

5. Feladat *(15 pont)*

A megoszló erőrendszerrel terhelt *A-D* gerendát az *A* csukló, valamint az (1), (2) és (3) jelű rudak egyensúlyozzák. Adott mennyiségek:

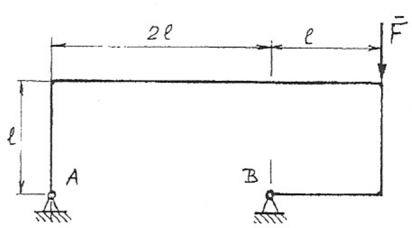


$l = 1.2\,m, \quad p = 6\dfrac{kN}{m}, \quad E = 2 \cdot 10^5\,MPa,$

$n = 3, \quad \lambda_e = 110.$

(a) Számítsa ki a kényszererőket.
(b) Határozza meg az S_1, S_2 és S_3 rúderőket.
(c) Méretezze az (1) jelű, négyzet – keresztmetszetű rudat kihajlásra!

6. Feladat *(20 pont)*

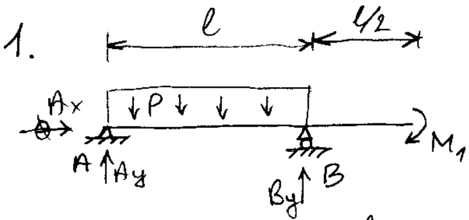


Tekintsük az ábrán látható síkbeli tartót. A rúd anyaga és keresztmetszeti jellemzői állandók.
Adott paraméterek: F, l, I, E.

A megadott paraméterek függvényében
(a) számítsa ki a vázolt tartó kényszererőit és
(b) rajzolja meg a hajlítóigénybevételi ábrát.

PONT	JEGY
0 - 39	1
40 - 54	2
55 - 69	3
70 - 84	4
85 - 100	5

1.



$p = 6\ \frac{kN}{m}$ $\quad M_1 = 0{,}5\ kNm$ $\quad \sigma_{meg} = 120\ MPa$

$l = 1\ m$ $\quad E = 2{,}1 \cdot 10^5\ MPa$

a) $\Sigma M_A = 0$ $\quad p l \cdot \frac{l}{2} - B_y \cdot l + M_1 = 0$ $\quad B_y = \frac{p l}{2} + \frac{M_1}{l} = \frac{6 \cdot 1}{2} + \frac{0{,}5}{1} =$

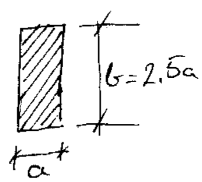
$= 3{,}5\ kN \uparrow$

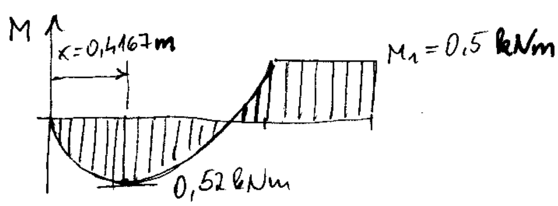
(3p)

$\Sigma F_x = 0$ $\quad A_x = 0\ N$

$\Sigma F_y = 0$ $\quad A_y - p \cdot l + B_y = 0$ $\quad A_y = p l - B_y = 6 \cdot 1 - 3{,}5 = 2{,}5\ kN \uparrow$

b)





$M(x) = -A_y \cdot x + \frac{p x^2}{2}$ $\Rightarrow$ $M_{max} = -0{,}52\ kNm$

$T(x) = -A_y + p x = 0$ $\Rightarrow$ $x = \frac{A_y}{p} = \frac{2{,}5}{6} = 0{,}4167\ m$

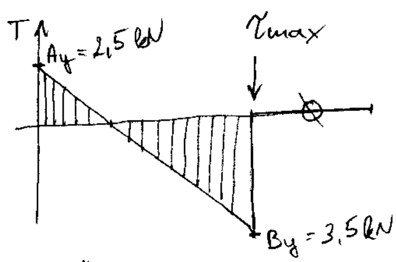
$I = \frac{a b^3}{12} = \frac{a (2{,}5a)^3}{12} = 1{,}302 \cdot a^4$

$\sigma = \frac{M}{I} \cdot \frac{2{,}5a}{2} = \frac{M}{1{,}302\, a^3} \cdot \frac{2{,}5}{2}$ $\Rightarrow$ $a^3 = \frac{0{,}96 \cdot M}{\sigma_{meg}} = \frac{0{,}96 \cdot 520}{120 \cdot 10^6} =$

$= 4{,}16 \cdot 10^{-6}\ m^3$ $\quad$ (8p)

$a = 0{,}0161\ m = \underline{\underline{16{,}1\ mm}}$

c)



τ_{max}: „B" támasznál

$\tau_{max} = \frac{T_{max} \cdot S_{max}}{I_x \cdot v} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T_{max}}{a \cdot b} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3500}{2{,}5 \cdot 16{,}1^2} =$

$= \underline{\underline{8{,}1\ MPa}}$

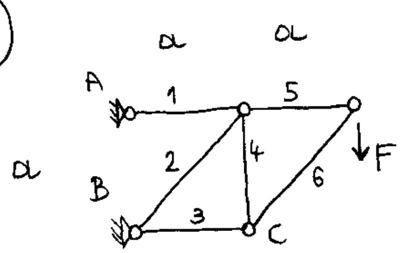
$S_{max} = \left(a \cdot \frac{2{,}5a}{2}\right) \cdot \frac{2{,}5a}{4} = 3{,}125 \cdot 10^{-6}\ m^3$ $\quad$ (4p)

$I = 1{,}302 \cdot a^4 = 8{,}267 \cdot 10^{-8}\ m^4$

$v = a = 0{,}0159\ m$

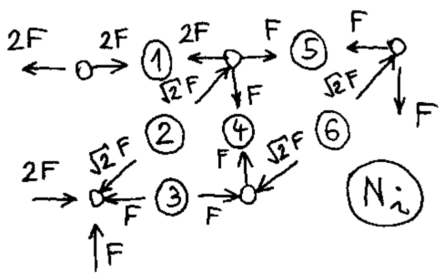
$T_{max} = B_y = 3500\ N$

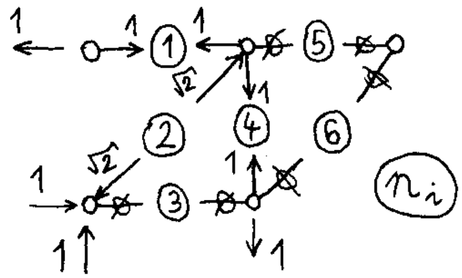
2



Adott: AE, a, F

$\Delta y_c = ?$





i	l_i	A_i	E_i	N_i	n_i	$\frac{N_i n_i l_i}{A_i E_i}$
1	a			$+2F$	$+1$	$+2\frac{Fa}{AE}$
2	$\sqrt{2}a$			$-\sqrt{2}F$	$-\sqrt{2}$	$+2\sqrt{2}\frac{Fa}{AE}$
3	a	A	E	$-F$	0	0
4	a			$+F$	$+1$	$+\frac{Fa}{AE}$
5	a			$+F$	0	0
6	$\sqrt{2}a$			$-\sqrt{2}F$	0	0

3p – l_i

6p – N_i

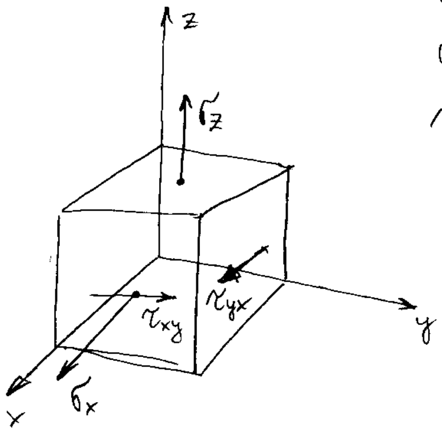
6p – n_i

3p – $\frac{N_i n_i l_i}{A_i E_i}$

$$\boxed{\Delta y_c = \sum_{i=1}^{6} \frac{N_i n_i l_i}{A_i E_i} = \left(3+2\sqrt{2}\right)\frac{Fa}{AE} = 5{,}828\,\frac{Fa}{AE}\ (\downarrow)}$$

2p

3.



$\sigma_x = 100\,MPa \qquad \gamma_{xy} = 6\cdot 10^{-4}$

$\sigma_z = 80\,MPa \qquad \varepsilon_y = -2{,}5\cdot 10^{-4}$

$\tau_{xy} = 48\,MPa$

a) $\underline{\underline{A}} = \dfrac{1}{2G}\cdot\left[\underline{\underline{F}} - \dfrac{F_I\cdot \underline{\underline{E}}}{m+1}\right]$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2G}\left[\tau_{xy} - \frac{(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\cdot 0}{m+1}\right] = \frac{\tau_{xy}}{2G} \Rightarrow G = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{48}{6\cdot 10^{-4}} =$$

$$\frac{E}{G} = 2(1+\nu) \qquad\qquad = 8\cdot 10^{4}\,MPa = \underline{\underline{80\,GPa}}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2G}\left[\overset{=0}{\sigma_y} - \frac{(\sigma_x+\overset{=0}{\sigma_y}+\sigma_z)\cdot 1}{m+1}\right] \Rightarrow m+1 = \frac{\sigma_x+\sigma_z}{-2G\cdot\varepsilon_y} = \frac{(100+80)\cdot 10^{6}}{-2\cdot 80\cdot 10^{9}\cdot(-2{,}5)\,10^{-4}}$$

$$= 4{,}5$$

9p

$E = 2(1+\nu)\cdot G = \underline{\underline{205{,}71\,GPa}} \qquad \underline{\underline{m = 3{,}5}} \qquad \nu = \dfrac{1}{m} = 0{,}2857$

b)

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 100 & 48 & 0 \\ 48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{bmatrix} MPa \Rightarrow \frac{1}{2}\gamma_{zx} = \frac{1}{2G}\cdot\overset{=0}{\tau_{zx}} = 0$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{zy} = \frac{1}{2G}\cdot\overset{=0}{\tau_{zy}} = 0$$

6p

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G}\cdot\left[\sigma_x - \frac{\sigma_x+\sigma_z}{m+1}\right] = \frac{1}{2\cdot 80\cdot 10^{9}}\left[100 - \frac{180}{4{,}5}\right]\cdot 10^{6} = 3{,}75\cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2G}\left[\sigma_z - \frac{\sigma_x+\sigma_z}{m+1}\right] = \frac{1}{2\cdot 80\cdot 10^{9}}\left[80 - \frac{180}{4{,}5}\right]\cdot 10^{6} = 2{,}5\cdot 10^{-4}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3{,}75 & 3 & 0 \\ 3 & -2{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}5 \end{bmatrix}\cdot 10^{-4}$$

4

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -7{,}5 \\ 0 & 1{,}4 & 0 \\ -7{,}5 & 0 & -8 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \qquad \begin{matrix} G = 26{,}5\ GPa \\ m = 3 \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{F}} = 2G\left(\underline{\underline{A}} + \frac{A_I}{m-2}\underline{\underline{E}}\right) = 2 \cdot 26{,}5 \cdot 10^3 \left(\begin{bmatrix} 9 & 0 & -7{,}5 \\ 0 & 1{,}4 & 0 \\ -7{,}5 & 0 & -8 \end{bmatrix} + \underbrace{\frac{9+1{,}4-8}{3-2}}_{+2{,}4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot 10^{-4}$$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 60{,}42 & 0 & -39{,}75 \\ 0 & 20{,}14 & 0 \\ -39{,}75 & 0 & -29{,}68 \end{bmatrix} MPa$$

5 p

$$\det\left(\underline{\underline{F}} - \sigma_i \underline{\underline{E}}\right) = \begin{vmatrix} 60{,}42-\sigma_i & 0 & -39{,}75 \\ 0 & 20{,}14-\sigma_i & 0 \\ -39{,}75 & 0 & -29{,}68-\sigma_i \end{vmatrix} =$$

$$= \left(20{,}14-\sigma_i\right)\left[\left(60{,}42-\sigma_i\right)\left(-29{,}68-\sigma_i\right) - 39{,}75^2\right] = 0$$

$$\sigma_i = 20{,}14\ MPa \qquad \sigma_i^2 - 30{,}74\,\sigma_i - 3373 = 0$$

$$\sigma_i = \frac{30{,}74 \pm \sqrt{30{,}74^2 + 4 \cdot 3373}}{2} = 15{,}37 \pm 60{,}08 = \begin{cases} 75{,}45 \\ -44{,}71 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \sigma_1 = 75{,}45\ MPa \\ \sigma_2 = 20{,}14\ MPa \\ \sigma_3 = -44{,}71\ MPa \end{matrix}}$$

5 p

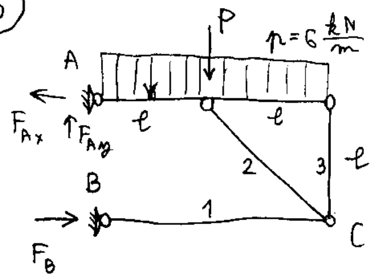
$$\varnothing_I = 60{,}42 + 20{,}14 - 29{,}68 = 50{,}88\ MPa$$

$$\varnothing_{II} = 20{,}14\left(-44{,}71\right) + 75{,}45\left(-44{,}71\right) + 75{,}45 \cdot 20{,}14 = -2754$$

$$\sigma_{red,HMH} = \sqrt{\varnothing_I^2 - 3\,\varnothing_{II}} = \sqrt{50{,}88^2 - 3\left(-2754\right)} = 104{,}2\ MPa$$

5 p

5



$\ell = 1{,}2\ m$

$E = 2\cdot 10^5\ MPa$

$n = 3$

$\lambda_e = 110$

$$\sum M_A = 0 = -P\cdot \ell + F_B \ell \rightarrow \boxed{F_B = P = 6\cdot 2{,}4 = 14{,}4\ kN\ (\rightarrow)}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{F_{Ax} = F_{Bx} = 14{,}4\ kN\ (\leftarrow)}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{F_{Ay} = P = 14{,}4\ kN\ (\uparrow)}$$

3p

C csomópont egyensúlya:

N_2, N_3, N_1

$N_1 = -F_B = -14{,}4\ kN$ (ny)

$N_3 = N_1 = -14{,}4\ kN$ (ny)

$N_2 = +\sqrt{2}\cdot 14{,}4\ kN = +20{,}36\ kN$ (h)

6p

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 I E}{\ell_0^2} = n|N_1| = 3\cdot 14{,}4 = 43{,}2\ kN$$

$\ell_0 = \ell = 2{,}4\ m$

$$I = \frac{F_{kr}\ell_0^2}{\pi^2 E} = \frac{43{,}2\cdot 10^3\cdot 2400^2}{\pi^2\cdot 2\cdot 10^5} = 126\,060\ mm^4$$

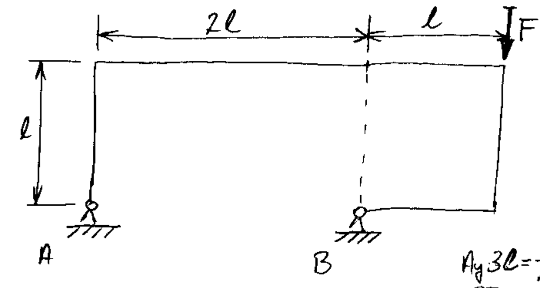
6p

$$I = \frac{a^4}{12} \rightarrow a = \sqrt[4]{12 I} = \sqrt[4]{12\cdot 126060} = 35{,}07\ mm$$

$$A = a^2 = 35{,}07^2 = 1230\ mm^2$$

$$\lambda = \frac{\ell_0}{\sqrt{\frac{I}{A}}} = \frac{2400}{\sqrt{\frac{126\,060}{1230}}} = 237{,}1 > \lambda_e \rightarrow \text{Euler OK.}$$

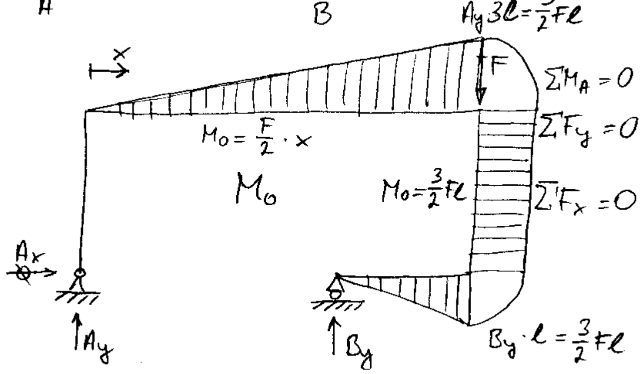
6.



Adott: $F, \ell, 1, E$

a, A szerkezet határozatlan!

b,

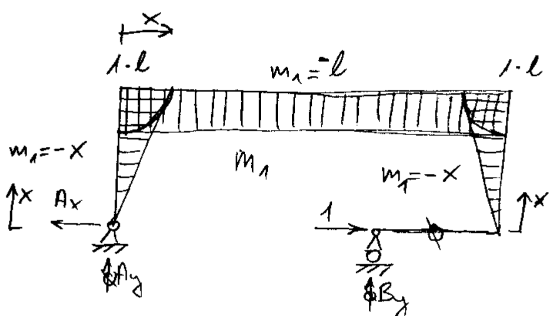


$\Sigma M_A = 0 \quad F\cdot 3\ell - B_y \cdot 2\ell = 0 \quad B_y = \frac{3}{2}F \uparrow$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - F + B_y = 0 \quad A_y = -\frac{1}{2}F \downarrow$

$\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0\,N$

4p



$\Sigma F_x = 0 \quad -A_x + 1 = 0 \quad A_x = 1$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y + B_y = 0 \quad \rightarrow A_y = 0\,N$

$\Sigma M_A = 0 \quad 1\cdot 0 + B_y \cdot 2\ell = 0 \Rightarrow B_y = 0\,N$

4p

$$\delta_{10} = \int_{(\ell)} \frac{M_0 \cdot m_1}{1E}\,dx = \int_0^{3\ell} \frac{\frac{F}{2}x\cdot(-\ell)}{1E}\,dx + \int_0^{\ell} \frac{\frac{3}{2}F\ell\cdot(-x)}{1E}\,dx = \frac{1}{1E}\left[-\frac{F\ell\cdot x^2}{4}\right]_0^{3\ell} + \frac{1}{1E}\left[\frac{3}{4}F\ell x^2\right]_0^{\ell} =$$

$$= -\frac{9F\ell^3 + 3F\ell^3}{4\cdot 1E} = -\frac{3F\ell^3}{1E}$$

3p

$$\delta_{11} = \int_{(\ell)} \frac{m_1 \cdot m_1}{1E}\,dx = \int_0^{\ell} \frac{(-x)^2}{1E}\,dx + \int_0^{3\ell} \frac{(-\ell)^2}{1E}\,dx + \int_0^{\ell} \frac{(-x)^2}{1E}\,dx = \frac{2}{1E}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\ell} + \frac{1}{1E}\left[\ell^2 x\right]_0^{3\ell} =$$

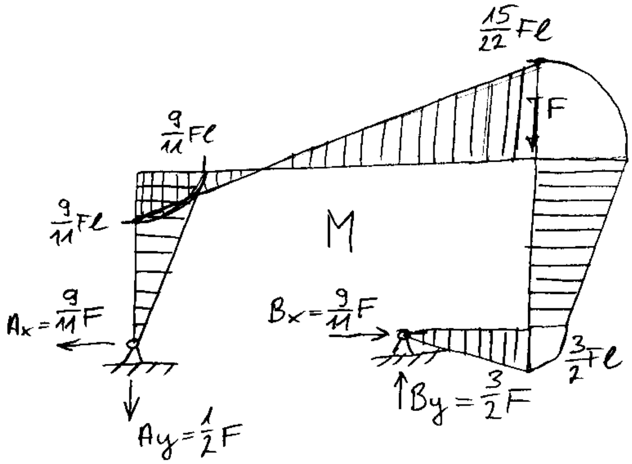
$$= \frac{\frac{2}{3}\ell^3 + 3\ell^3}{1E} = \frac{\frac{11}{3}\ell^3}{1E}$$

3p

$$\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{3F\ell^3}{1E}}{\frac{\frac{11}{3}\ell^3}{1E}} = \frac{9}{11}F \rightarrow$$

$$B_X = \frac{9}{11}F \rightarrow$$

2p



$\sum M_A = 0 \quad F \cdot 3l - B_y \cdot 2l = 0$

$B_y = \frac{3}{2}F \uparrow$

$\sum F_y = 0 \quad -A_y - F + \frac{3}{2}F = 0$

$A_y = +\frac{1}{2}F \downarrow$

$\sum F_x = 0 \quad -A_x + B_x = 0$

$A_x = B_x = \frac{9}{11}F \leftarrow$

4p

$M = M_0 + X_1 \cdot m_1$