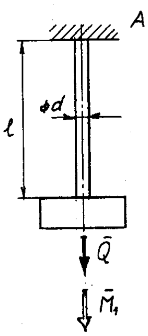
MECHANIKA 2 2007. 12. 19.

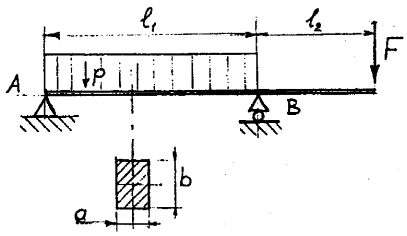
1.) A kör keresztmetszetű rúdhoz mereven kapcsolódik a Q súlyú tárcsa.
Adott mennyiségek:



$$l = 1.6\,m, \quad d = 12\,mm, \quad Q = 10\,kN, \quad G = 8 \cdot 10^4\,MPa,$$
$$\sigma_{meg} = 180\,MPa.$$

(a) Mekkora M_1 nyomatékkal terhelhető a rúd? (σ_{red} értékét a Mohr elmélet szerint számítva)
(b) Határozza meg a rúdvég elcsavarodását. (15 pont)

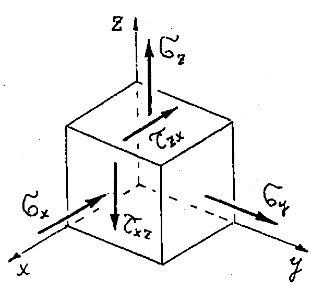
2.) A vázolt kéttámaszú tartó anyaga acél, téglalap-alakú keresztmetszete állandó.
Adott mennyiségek:



$$F = 6kN, \quad p = 8\frac{kN}{m}, \quad \sigma_{meg} = 160MPa,$$
$$l_1 = 1.2m, \quad l_2 = 0.4m, \quad \frac{b}{a} = \sqrt[3]{5}.$$

(a) Számítsa ki a reakciókat.
(b) Rajzolja meg az igénybevételi ábrákat.
(c) Méretezze hajlításra a tartót. (a = ?) (20 pont)

3.)

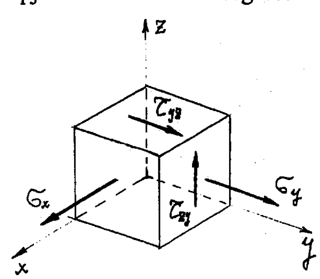


Egy rugalmas test egy P pontja környezetében a feszültségi állapotot a vázolt elemi kocka lapján működő ismert feszültség-összetevők határozzák meg. (A rajzon nem jelölt feszültség-komponensek értéke zérus!)
Adott mennyiségek:

$$|\sigma_x| = 30\,Mpa, \quad \sigma_y = \sigma_z = 90MPa, \quad |\tau_{xz}| = 60MPa,$$
$$E = 2 \cdot 10^5\,MPa, \quad m = 3.4.$$

(a) Határozza meg a főfeszültségeket.
(b) Számítsa ki a főnyúlásokat.
(c) Határozza meg a HMH-elmélet szerinti egyenértékű (redukált) feszültséget. (15 pont)

4.) Egy rugalmas test egy pontja környezetében a feszültségi állapotot a vázolt elemi kocka lapján működő feszültség-összetevők határozzák meg. Adott mennyiségek:



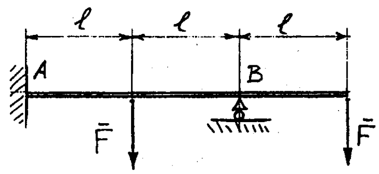
$$E = 210\,GPa, \quad m = 3.3, \quad \varepsilon_x = 2 \cdot 10^{-4},$$
$$\sigma_y = 80\,MPa, \quad \tau_{zy} = 60\,MPa.$$

Az előjelek az ábrából olvasandók!

(a) Számítsa ki σ_x értékét.
(b) Határozza meg a főfeszültségeket.
(c) Számítsa ki a HMH elmélet szerinti σ_{egy} egyenértékű feszültséget. (20 pont)

5.)

A vázolt állandó keresztmetszetű gerenda-tartót az adott erőrendszer terheli.



Adott mennyiségek:

$F = 3000N, \quad l = 0.5m.$

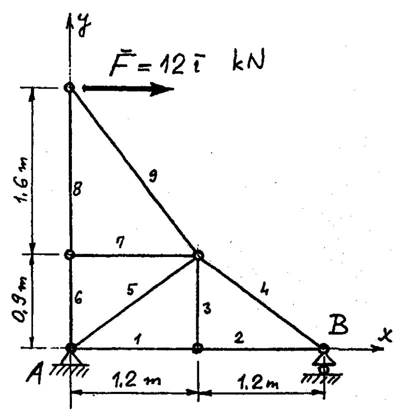
(a) Számítsa ki a kényszererőket.

(b) Rajzolja meg a gerenda hajlítónyomatéki ábráját.

(15 pont)

6.)

A vázolt rácsos szerkezetet az **F** erő terheli. Számítsa ki



(a) a kényszererőket,

~~(b) a szerkezet rúderőit.~~

(c) Méretezze kihajlásra a *9* számú rudat. A rúd négyzet-keresztmetszetű, anyaga acél:

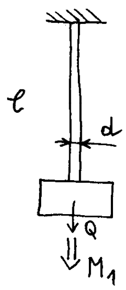
$E = 2.1 \cdot 10^5\ Mpa, \qquad \lambda_e = 110.$

Az előírt biztonsági tényező $n = 3.5$.

(15 pont)

PONT	JEGY
0 - 39	1
40 - 54	2
55 - 69	3
70 - 84	4
85 - 100	5

1



$\ell = 1{,}6\,m$

$d = 12\,mm$

$Q = 10\,kN$

$G = 8\cdot 10^4$ MPa

$\sigma_{meg} = 180$ MPa

$$A = \frac{d^2\pi}{4} = \frac{12^2\pi}{4} = 113{,}1\,mm^2$$ 1p

$$I_p = \frac{d^4\pi}{32} = \frac{12^4\pi}{32} = 2036\,mm^4$$ 2p

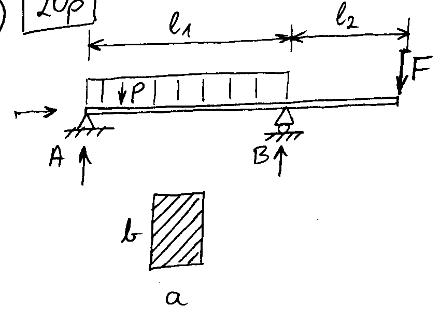
$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{10\cdot 10^3}{113{,}1} = 88{,}42\text{ MPa}$$ 2p

$$\sigma_{meg} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \longrightarrow \tau = \sqrt{\frac{\sigma_{meg}^2 - \sigma^2}{4}} = \sqrt{\frac{180^2 - 88{,}42^2}{4}} = 78{,}39\text{ MPa}$$ 3p

$$\tau = \frac{M_1}{I_p}\frac{d}{2} \longrightarrow \boxed{M_1} = \frac{2\tau I_p}{d} = \frac{2\cdot 78{,}39\cdot 2036}{12} = 26\,600\,Nmm = \boxed{26{,}6\,Nm}$$ 3p

$$\boxed{\varphi} = \frac{M_1 \ell}{I_p G} = \frac{26600\cdot 1600}{2036\cdot 8\cdot 10^4} = \boxed{0{,}2613\,rad = 14{,}97^\circ}$$ 4p

2 $\boxed{20p}$



$F = 6\,kN \quad p = 8\,\frac{kN}{m} \quad \sigma_{meg} = 160\,MPa$

$l_1 = 1{,}2\,m \quad l_2 = 0{,}4\,m \quad \frac{b}{a} = \sqrt[3]{5}$

$\Downarrow$

$b = a \cdot \sqrt[3]{5}$

$\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0\,N$ (1p)

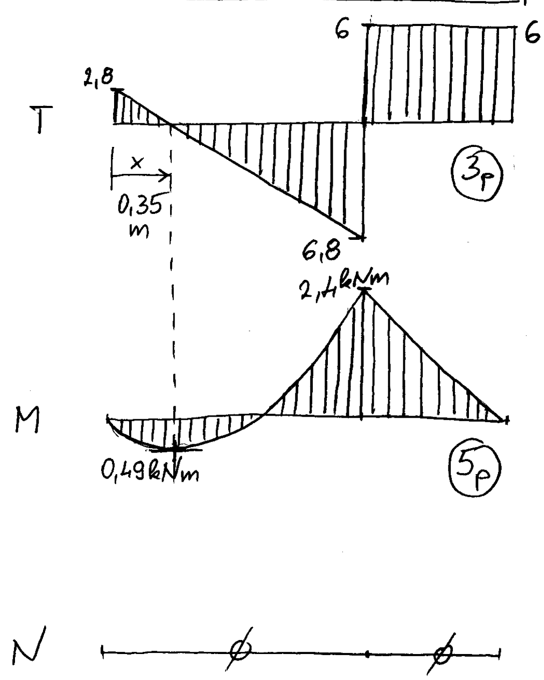
$\Sigma M_A = 0 \quad \frac{p l_1^2}{2} - B_y \cdot l_1 + F(l_1 + l_2) = 0 \Rightarrow B_y = \frac{p l_1}{2} + F\,\frac{l_1 + l_2}{l_1} = \frac{8 \cdot 1{,}2}{2} + 6 \cdot \frac{1{,}2 + 0{,}4}{1{,}2} =$

$= 12{,}8\,kN = 12800\,N \uparrow$ (3p)

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - p \cdot l_1 + B_y - F = 0 \Rightarrow A_y = F + p \cdot l_1 - B_y = 6 + 8 \cdot 1{,}2 - 12{,}8 = 2{,}8\,kN =$

$= 2800\,N \uparrow$ (3p)

$$\boxed{\begin{array}{ll} A_x = 0\,N & B_x = 0 \\ A_y = 2{,}8\,kN \uparrow & B_y = 12{,}8\,kN \uparrow \end{array}}$$



$T_1 = A_y - p \cdot x$

$x = \frac{A_y}{p} = \frac{2{,}8}{8} = 0{,}35\,m$

$M_1 = A_y \cdot x - \frac{p x^2}{2}$

$M_{max} = 2{,}4\,kNm = 2400\,Nm$

$I = \frac{a b^3}{12} = \frac{a^4 \cdot 5}{12}$

$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I} \cdot \frac{b}{2} = \frac{M_{max} \cdot 12}{a^4 \cdot 5} \cdot \frac{a \cdot \sqrt[3]{5}}{2}$

$\sigma_{max} = \sigma_{meg}$

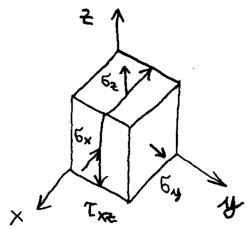
$\sigma_{meg} = \frac{6}{5} M_{max} \cdot \frac{\sqrt[3]{5}}{a^3}$

$a^3 = \frac{6 \cdot M_{max} \cdot \sqrt[3]{5}}{5 \cdot \sigma_{meg}} = \frac{6 \cdot 2400 \cdot \sqrt[3]{5}}{5 \cdot 160 \cdot 10^6} =$

$= 3{,}078 \cdot 10^{-5}\,m$

$a = 0{,}03134\,m = 31{,}34\,mm$ (5p)

3



$|\sigma_x| = 30\,\text{MPa}$ $\qquad E = 2\cdot 10^5\,\text{MPa}$

$\sigma_y = \sigma_z = 90\,\text{MPa}$ $\qquad m = 3{,}4$

$|\tau_{xz}| = 60\,\text{MPa}$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} -30 & 0 & -60 \\ 0 & 90 & 0 \\ -60 & 0 & 90 \end{bmatrix} \text{MPa}$$ 2p

$$\det(\underline{\underline{F}} - \sigma_i \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} -30-\sigma_i & 0 & -60 \\ 0 & 90-\sigma_i & 0 \\ -60 & 0 & 90-\sigma_i \end{vmatrix} = (90-\sigma_i)\left[(-30-\sigma_i)(90-\sigma_i) - 60^2\right] = 0$$ 2p

$$\downarrow \qquad \sigma_i = 90\,\text{MPa}$$

$$\downarrow \qquad \sigma_i^2 - 60\sigma_i - 6300 = 0$$

$$\sigma_i = \frac{60 \pm \sqrt{60^2 + 4\cdot 6300}}{2} = 30 \pm 84{,}85 = \begin{cases} 114{,}85 \\ -54{,}85 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_1 &= 114{,}9\,\text{MPa} \\ \sigma_2 &= 90\,\text{MPa} \\ \sigma_3 &= -54{,}85\,\text{MPa} \end{aligned}}$$ 3p

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{m}\right) = \frac{1}{2\cdot 10^5}\left(114{,}9 - \frac{90-54{,}85}{3{,}4}\right) = 5{,}228\cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1+\sigma_3}{m}\right) = \frac{1}{2\cdot 10^5}\left(90 - \frac{114{,}9-54{,}85}{3{,}4}\right) = 3{,}617\cdot 10^{-4}$$ 4p

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{m}\right) = \frac{1}{2\cdot 10^5}\left(-54{,}85 - \frac{114{,}9+90}{3{,}4}\right) = -5{,}756\cdot 10^{-4}$$

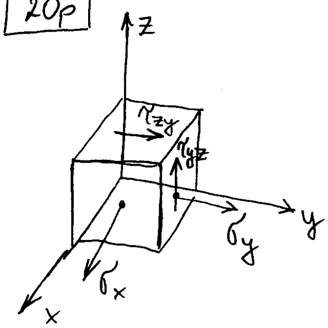
$$\boxed{\sigma_{red,HMH} = \sqrt{F_I^2 - 3F_{II}} = \sqrt{150^2 - 3(-900)} = 158{,}7\,\text{MPa}}$$ 4p

$$G = \frac{E}{2\left(1+\frac{1}{m}\right)} = \frac{2\cdot 10^5}{2\left(1+\frac{1}{3{,}4}\right)} = 77\,273\,\text{MPa}$$

$$\underline{\underline{A}}' = \frac{1}{2G}\left(\underline{\underline{F}}' - \frac{F_I'}{m+1}\underline{\underline{E}}\right) = \frac{1}{2\cdot 77273}\left(\begin{bmatrix} 114{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & -54{,}85 \end{bmatrix} - \underbrace{\frac{150}{3{,}4+1}}_{-34{,}09}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 5{,}229 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}618 & 0 \\ 0 & 0 & -5{,}755 \end{bmatrix}\cdot 10^{-4}$$

4 $\boxed{20p}$



$E = 210\,GPa \quad m = 3{,}3 \quad \varepsilon_x = 2\cdot 10^{-10}$

$\sigma_y = 80\,MPa \quad \tau_{zy} = 60\,MPa$

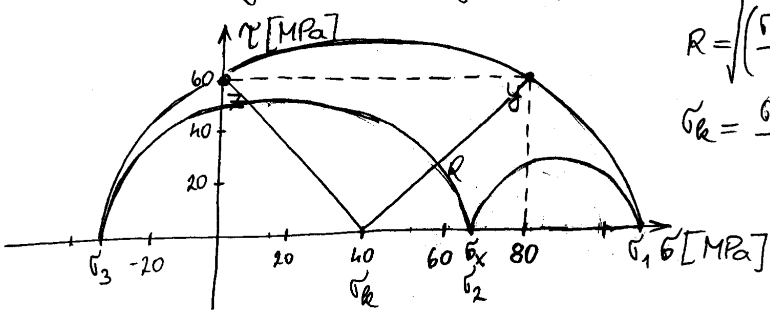
$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G}\cdot\left(\sigma_x - \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{m+1}\right) \Rightarrow$$

$$\sigma_x = \left[\varepsilon_x \cdot 2G + \frac{\sigma_y+\sigma_z}{m+1}\right]\cdot\frac{m+1}{m}$$

$$\frac{E}{G} = 2(1+\nu) \Rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2\left(1+\frac{1}{m}\right)} = \frac{210\cdot 10^9}{2\left(1+\frac{1}{3{,}3}\right)} = 80{,}581\cdot 10^9\,Pa \quad (1p)$$

$$\sigma_x = \left[2\cdot 10^{-4}\cdot 2\cdot 80{,}581\cdot 10^9 + \frac{80\cdot 10^6 + 0}{3{,}3+1}\right]\cdot\frac{3{,}3+1}{3{,}3} = 66{,}24\cdot 10^6\,Pa = $$
$$= 66{,}24\,MPa \quad (5p)$$

Az x főirány, mert $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0\,MPa$



$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y-\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} = \sqrt{40^2+60^2} = $$
$$= 72{,}111\,MPa$$

$$\sigma_k = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} = \frac{80-0}{2} = 40\,MPa$$

$\sigma_1 = \sigma_k + R = 40 + 72{,}111 = 112{,}11\,MPa$ (10p)

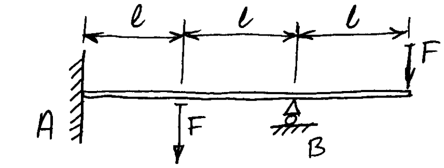
$\sigma_2 = \sigma_x = 66{,}24\,MPa$

$\sigma_3 = \sigma_k - R = 40 - 72{,}111 = -32{,}11\,MPa$

$$\sigma^{HMH} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[45{,}87^2 + 98{,}35^2 + (-144{,}22)^2\right]} =$$

$$= \underline{\underline{127{,}63\,MPa}} \quad (4p)$$

5. $\boxed{15p}$



$F = 3000\,N \qquad l = 0{,}5\,m$

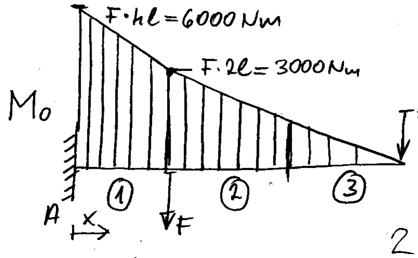
$1E = \text{áll.}$

$M_0^{(1)} = 4Fl - 2F\cdot x \qquad m_1^{(1)} = 2l - x$

$M_0^{(2)} = 2Fl - F\cdot x \qquad m_1^{(2)} = l - x$

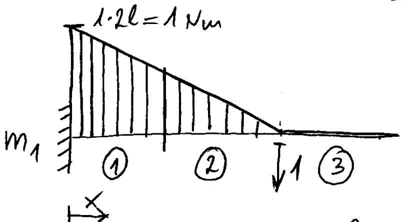
Törzstartó:

$M_0^{(3)} = Fl - F\cdot x \qquad m_1^{(3)} \equiv 0$



2p

$$\delta_{10} = \int \frac{M_0 \cdot m_1}{1E}\,dx = \int_0^l \frac{(4Fl-2Fx)(2l-x)}{1E}\,dx + \int_0^l \frac{(2Fl-Fx)(l-x)}{1E}\,dx =$$



$$= \left[\frac{8Fl^2 x - 4Flx^2 + \frac{2}{3}Fx^3}{1E}\right]_0^l + \left[\frac{2Fl^2x - \frac{3}{2}Flx^2 + \frac{1}{3}Fx^3}{1E}\right]_0^l =$$

1p

$$= \frac{1}{1E}\left\{\left[8Fl^3 - 4Fl^3 + \frac{2}{3}Fl^3\right] + \left[2Fl^3 - \frac{3}{2}Fl^3 + \frac{1}{3}Fl^3\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{1E}\cdot\frac{11}{2}Fl^3 = \frac{1}{1E}\cdot\frac{11}{2}\cdot 3000\cdot 0{,}5^3 = \frac{2062{,}5}{1E}\ m$$

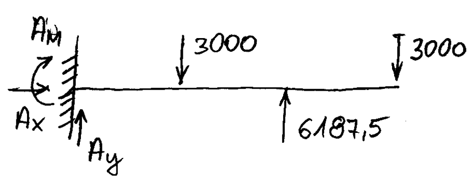
2p

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1\cdot m_1}{1E}\,dx = \int_0^{2l} \frac{(2l-x)^2}{1E}\,dx = \frac{1}{1E}\left[4l^2x - 2lx^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^{2l} = \frac{1}{1E}\left[8l^3 - 8l^3 + \frac{8}{3}l^3\right] =$$

$$= \frac{1}{1E}\cdot\frac{8}{3}l^3 = \frac{1}{1E}\cdot\frac{8}{3}\cdot 0{,}5^3 = \frac{1}{1E}\cdot 0{,}\overline{333}\ m$$

1p

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{1}{1E}\cdot\frac{11}{2}Fl^3}{\frac{1}{1E}\cdot\frac{8}{3}l^3} = \frac{-3}{8}\cdot\frac{11}{2}\cdot F = -\frac{33}{16}\cdot F = -\frac{33}{16}\cdot 3000 = -6187{,}5$$



$\Sigma M_A = 0 \qquad A_M + 3000\cdot 0{,}5 - 6187{,}5\cdot 1 + 3000\cdot 1{,}5 = 0$

$\underline{A_M} = 6187{,}5\cdot 1 - 3000\cdot 2 = \underline{\underline{187{,}5\ Nm}}$

2p

$\Sigma F_x = 0 \qquad \underline{\underline{A_x = 0N}}$

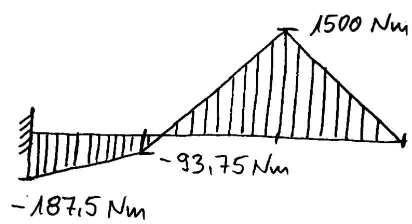
$\Sigma F_y = 0 \qquad A_y - 3000 + 6187{,}5 - 3000 = 0$

$M = M_0 + X_1\cdot m_1$

$\underline{\underline{A_y = -187{,}5\ N}}\ \downarrow$

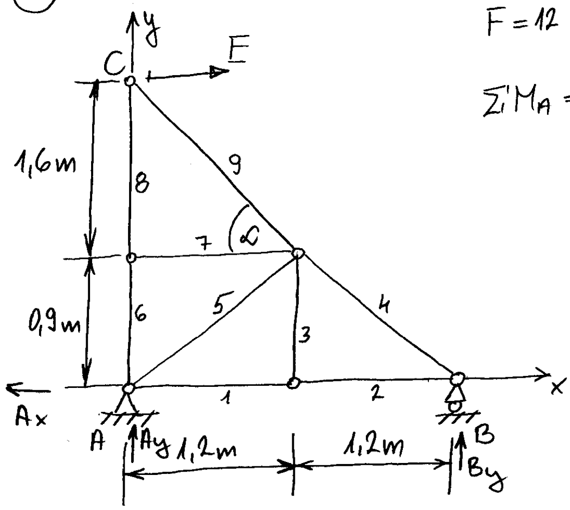
3p

$B_x = 0N \qquad \underline{\underline{B_y = 6187{,}5\ N}}\ \uparrow$



4p

⑥ $\boxed{15p}$



$F = 12\,kN \quad E = 2{,}1 \cdot 10^5\,MPa \quad \lambda_e = 110 \quad n = 3{,}5$

$\sum M_A = 0 \quad F \cdot (1{,}6 + 0{,}9) - B_y \cdot 2{,}4 = 0$

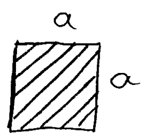
$B_y = F \cdot \dfrac{2{,}5}{2{,}4} = 12 \cdot \dfrac{2{,}5}{2{,}4} = 12{,}5\,kN \uparrow$

$\sum F_y = 0 \quad B_y + A_y = 0 \quad A_y = -B_y = -12{,}5\,kN \downarrow$

$\sum F_x = 0 \quad F - A_x = 0 \quad A_x = F = 12\,kN \leftarrow$

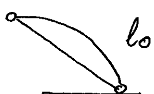
$A_x = 12\,kN \leftarrow \qquad B_x = 0\,N \qquad$ (4p)

$A_y = 12{,}5\,kN \downarrow \qquad B_y = 12{,}5\,kN \uparrow$



$\sum F_{xC} = 0 \quad F - N_{9x} = 0 \quad N_{9x} = F = 12\,kN$

$N_{9x} = N_9 \cdot \cos\alpha \Rightarrow N_9 = \dfrac{N_{9x}}{\cos\alpha} = \dfrac{12}{\cos 53{,}13^\circ} =$



$l_0 = l_9$

$tg\,\alpha = \dfrac{1{,}6}{1{,}2} \Rightarrow \alpha = 53{,}13^\circ$

$\underline{\underline{N_9 = 20\,kN}}$ (2p)

$l_9 = \sqrt{1{,}6^2 + 1{,}2^2} = 2\,m = l_0$ (2p)

$F_{krit} = n \cdot N_9 = 3{,}5 \cdot 20 = 70\,kN$ (1p)

$F_{krit} = \dfrac{\pi^2 \cdot I \cdot E}{l_0^2} \Rightarrow I = \dfrac{F_{krit} \cdot l_0^2}{\pi^2 \cdot E} = \dfrac{70 \cdot 10^3 \cdot 2^2}{\pi^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{11}} = 1{,}35095 \cdot 10^{-7}\,m^4$

$I = \dfrac{a^4}{12} \Rightarrow a^4 = 12 \cdot I = 12 \cdot 1{,}35095 \cdot 10^{-7} = 1{,}6211 \cdot 10^{-6}\,m^4$

$\underline{\underline{a}} = 0{,}03568\,m = \underline{\underline{35{,}68\,mm}}$ (3p)

Ell.:

$I = \dfrac{a^4}{12} = \dfrac{0{,}03568^4}{12} = 1{,}3506 \cdot 10^{-7}\,m^4$

$A = a^2 = 0{,}03568^2 = 0{,}001273\,m^2$ (3p)

$i = \sqrt{\dfrac{I}{A}} = \sqrt{\dfrac{1{,}3506 \cdot 10^{-7}}{0{,}001273}} = 0{,}0103\,m$

$\lambda = \dfrac{l_0}{i} = \dfrac{2}{0{,}0103} = 194{,}17 > \lambda_e = 110$ ✓