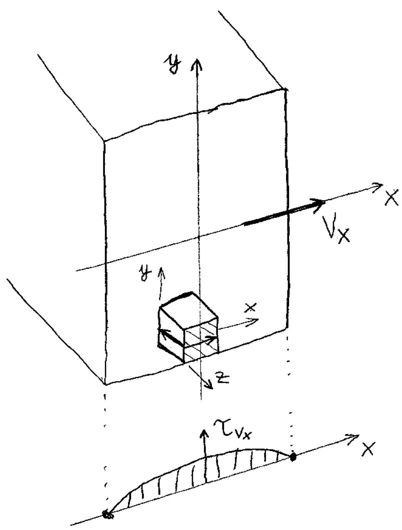
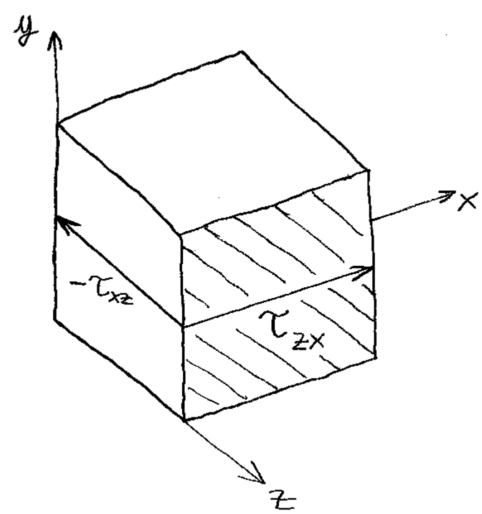
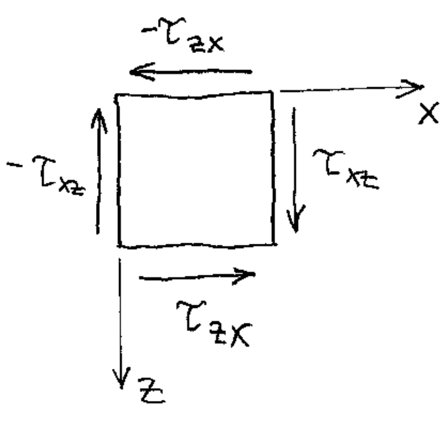
Kiegészítés a gyakorlatokon elhangzott elmélethez

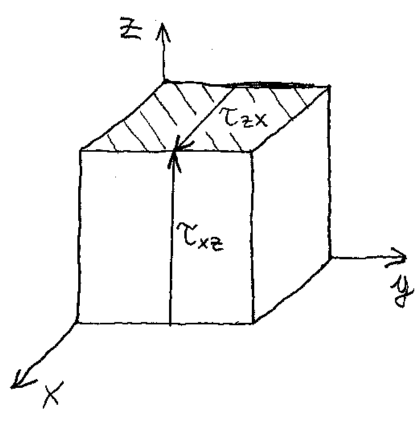
x irányú nyíróerő esetén a rúdtengelyhez és a keresztmetszethez igazított tengelyek esetén a $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ nyírófeszültség-pár előjele látszólag ellentmondásosan adódik. A z normálisú lapon lévő nyírófeszültség az x tengely irányába mutat, tehát pozitív. Az x normálisú lapon lévő nyírófeszültség viszont a z tengellyel ellentétes irányú, amiből az következne, hogy a nyírófeszültség előjele negatív. Az ellentmondás azonban csak látszólagos. Ennek oka, hogy az ilyen állásban kivágott kiskockának a negatív x normálisú lapját látjuk, amin a nyírófeszültség a z irányú erőegyensúly miatt ellentétes irányba mutat, mint a pozitív x normálisú lapon. Így valójában a $-\tau_{xz}$ nyírófeszültséget látjuk. A takarásban lévő, x normálisú lapon a τ_{xz} a z tengely irányába mutat.





A viszonyok jobban láthatók, az y tengely végpontjából tekintünk vissza a kockára.

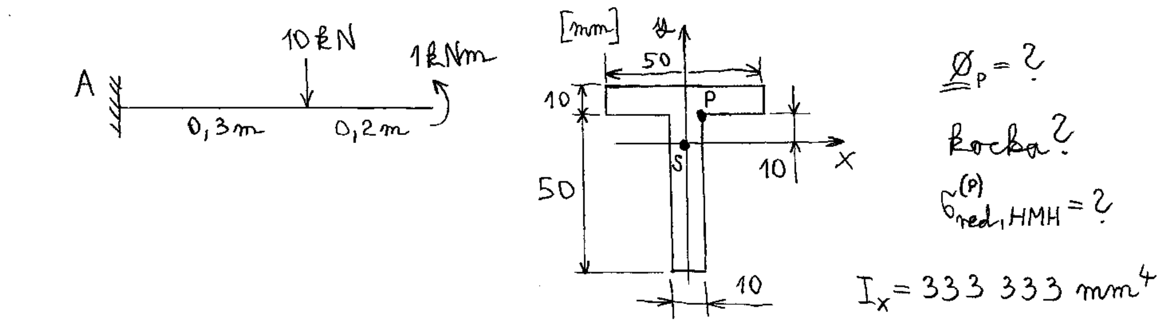


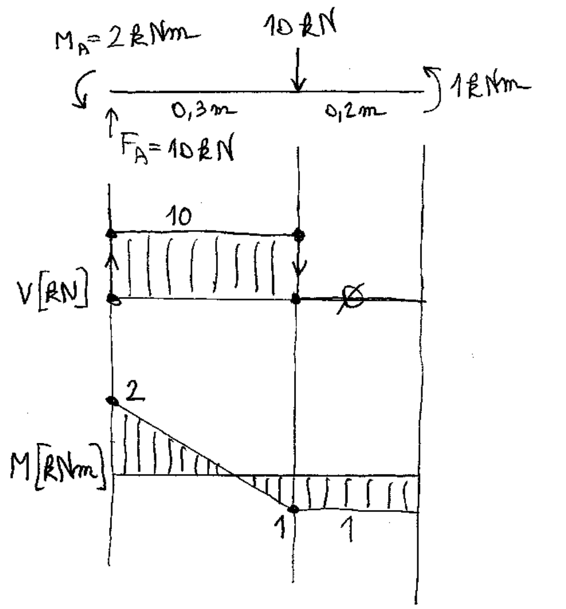


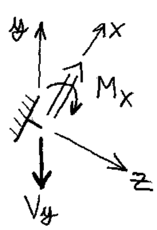
A z normálisú lap besraffozása segítheti a beforgatott kockán való tájékozódást. Mivel a z normálisú lap esik a keresztmetszet síkjába, ezen a lapon jelennek meg az igénybevételekből származó feszültségek. Ha ezt a lapot helyesen megrajzoljuk, akkor a többi lapra már csak a dualitás miatti nyírófeszültségeket kell rárajzolnunk.

1. példa: A 11. gyakorlat 1. feladata.

Határozzuk meg a tartó kritikus keresztmetszetének P pontjában kialakuló feszültségállapotot! Ábrázoljuk kiskockán, és írjuk fel a feszültségtenzort! Számítsuk ki a HMH elmélet szerinti redukált feszültséget!



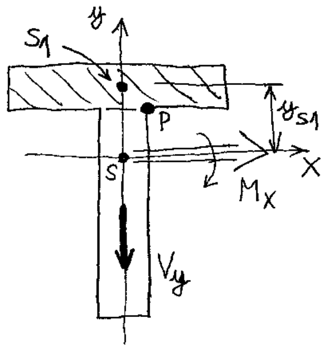




$V_y = 10\ kN$

$M_x = +2\ kNm$

A kritikus keresztmetszet a befogás, mert ott a nyíróerő és a hajlítónyomaték is maximális.

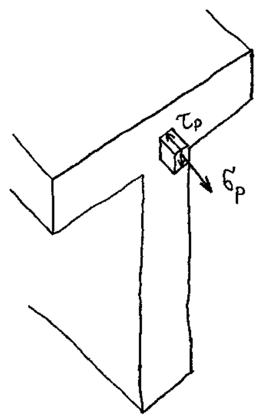


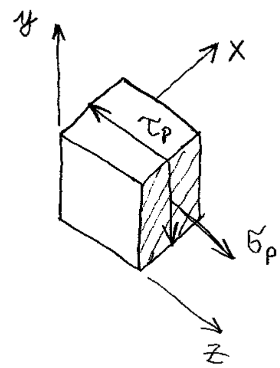
$$\underline{\sigma_P} = \frac{M_x}{I_x} y_P = \frac{+2\cdot 10^6}{333\,333}\cdot(+10) = \underline{+60{,}00\ \mathrm{MPa}}$$

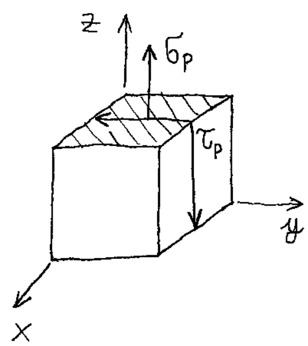
$$S_x^{(P)} = y_{S1}\cdot A_1 = 15\cdot 50\cdot 10 = 7500\ \mathrm{mm}^3$$

$$v_P = 10\ \mathrm{mm}$$

$$\underline{\tau_P} = \frac{V_y\, S_x^{(P)}}{I_x\, v_P} = \frac{10\cdot 10^3\cdot 7500}{333\,333\cdot 10} = \underline{22{,}50\ \mathrm{MPa}}$$

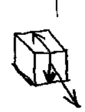






$$\underline{\underline{\Phi}}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau_P \\ 0 & -\tau_P & \sigma_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22{,}5 \\ 0 & -22{,}5 & +60 \end{bmatrix} \mathrm{MPa}$$

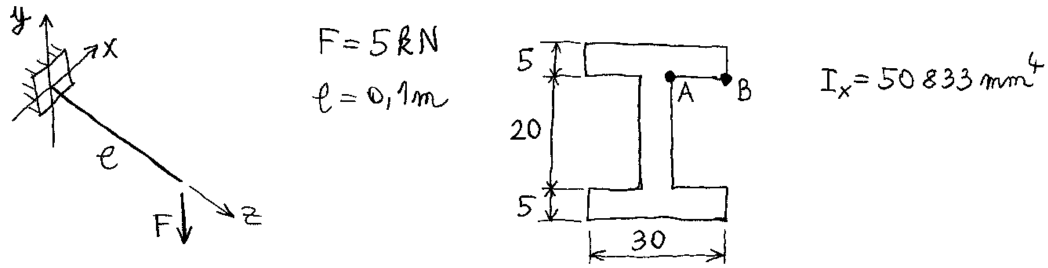
$$\boxed{\sigma_{red,HMH}^{(P)} = \sqrt{\Phi_I^2 - 3\Phi_{II}} = \sqrt{\sigma_P^2 + 3\tau_P^2} = \sqrt{60^2 + 3\cdot 22{,}5^2} = \underline{71{,}55\ \mathrm{MPa}}}$$

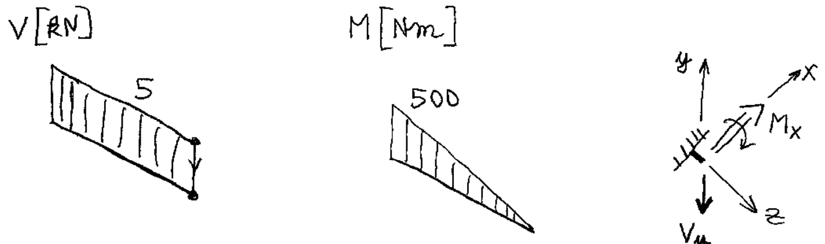


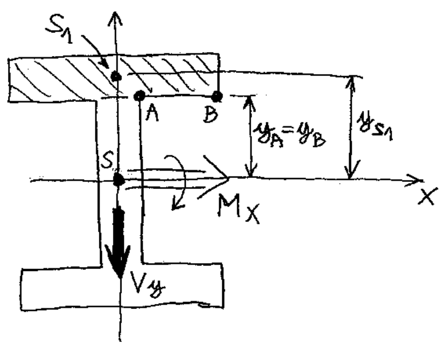
Megjegyzés:
A P ponti kiskocka tengelyeit a tartó és a keresztmetszet koordinátatengelyivel szinkronban vettük fel. Ezután a kockát beforgattuk a feszültségállapotos feladatok esetén használt állásba. A z normálisú lap sraffozása segítheti a tájékozódást.
Ha csak a redukált feszültséget kérdezték volna, akkor nem is lett volna szükség a koordinátatengelyek felvételére, csak arra, hogy megállapítsuk, hogy síkbeli feszültségállapot van, ezért az egyszerűsített képlet is használható.
A redukált feszültség definíciós képletét mindig adjuk meg, és a kocka szimbólummal jelezzük, hogy a síkbeli feszültségállapot miatt használjuk az egyszerűsített képletet.

2. példa: A csütörtök esti óra 1. feladata.

Számítsuk ki a tartó kritikus keresztmetszetének A és B pontjában a Mohr elmélet szerinti redukált feszültséget!







$$M_x = {}^{+}F\ell = 5000 \cdot 0{,}1 = {}^{+}500\ \mathrm{Nm}$$

$$V_y = F = 5\ \mathrm{kN}$$

$$\underline{\sigma_A = \sigma_B} = \frac{M_x}{I_x}\, y_A = \frac{{}^{+}500 \cdot 10^3}{50833}\,({}^{+}10) = \underline{+98{,}36\ \mathrm{MPa}}$$

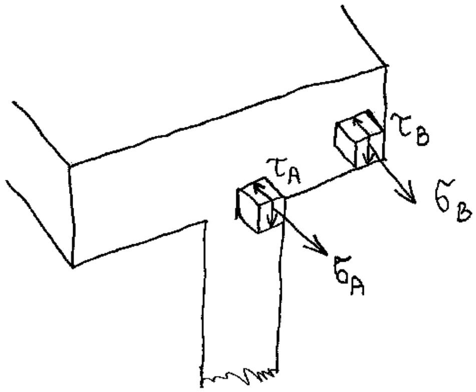
$$S_x^{(A)} = S_x^{(B)} = y_{S_1} \cdot A_1 = 12{,}5 \cdot 30 \cdot 5 = 1875\ \mathrm{mm}^3$$

$$v_A = 5\ \mathrm{mm}$$

$$\underline{\tau_A} = \frac{V_y S_x^{(A)}}{I_x v_A} = \frac{5000 \cdot 1875}{50\,833 \cdot 5} = \underline{36{,}89\ \mathrm{MPa}}$$

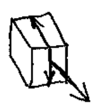
$$v_B = 30\ \mathrm{mm}$$

$$\underline{\tau_B} = \frac{V_y S_x^{(B)}}{I_x v_B} = \frac{5000 \cdot 1875}{50\,833 \cdot 30} = \underline{6{,}148\ \mathrm{MPa}}$$



$$\boxed{\sigma_{red,MOHR}^{(A)}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_A^2 + 4\tau_A^2} = \sqrt{98{,}36^2 + 4\cdot 36{,}89^2} = \boxed{123{,}0\ \text{MPa}}$$

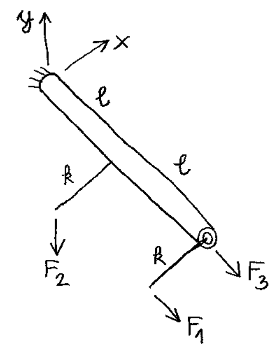
$$\boxed{\sigma_{red,MOHR}^{(B)}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_B^2 + 4\tau_B^2} = \sqrt{98{,}36^2 + 4\cdot 6{,}148^2} = \boxed{99{,}13\ \text{MPa}}$$



Megjegyzés:
A síkbeli feszültségállapot miatt az egyszerűsített képlet is használható.
A redukált feszültség definíciós képletét mindig adjuk meg, és a kocka szimbólummal jelezzük, hogy a síkbeli feszültségállapot miatt használjuk az egyszerűsített képletet.

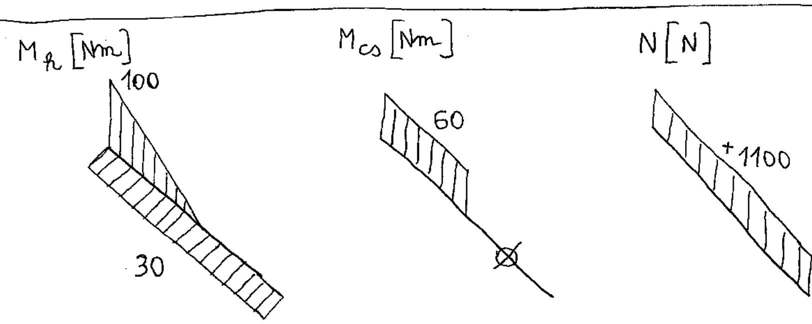
3. példa: A 11. gyakorlat 2 feladata.

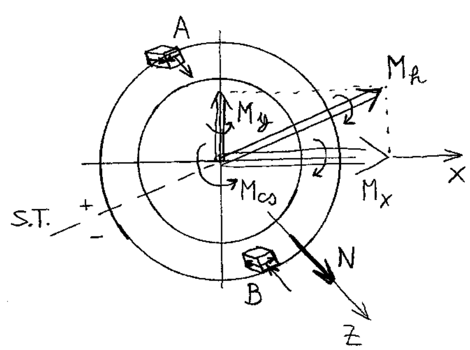
Számítsuk ki a cső keresztmetszetű konzolban ébredő legnagyobb feszültséget a Mohr elmélet szerint! Ábrázoljuk a kritikus keresztmetszet kritikus pontjának feszültségállapotát! Írjuk fel a feszültségtenzort!



$F_1 = 100\ N$, $F_2 = 200\ N$, $F_3 = 1\ kN$, $\ell = 0{,}5\ m$, $k = 0{,}3\ m$

$D = 30\ mm$, $d = 20\ mm$, $I = 31\,907\ mm^4$, $I_p = 63\,814\ mm^4$, $A = 392{,}7\ mm^2$





$N = {}^{+}1100\ N$

$M_x = {}^{+}F_2 \ell = {}^{+}100\ Nm$

$M_y = {}^{+}F_1 k = {}^{+}30\ Nm$

$M_h = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{100^2 + 30^2} =$

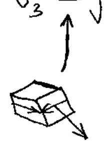
$= 104{,}4\ Nm$

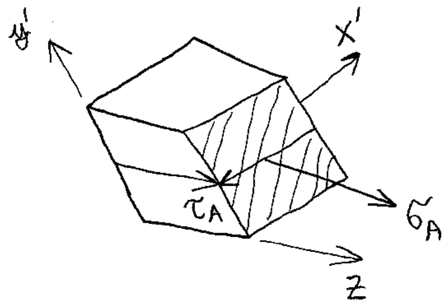
$M_{cs} = F_2 k = 60\ Nm$

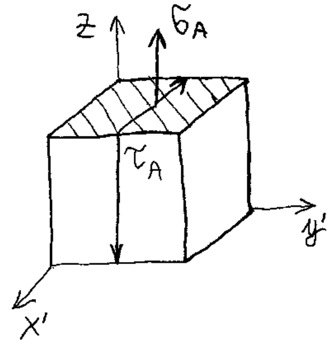
$$\underline{\sigma_A} = \frac{N}{A} + \frac{M_h}{I}\frac{D}{2} = \frac{{}^{+}1100}{392{,}7} + \frac{104{,}4 \cdot 10^3}{31907}\frac{30}{2} = 2{,}801 + 49{,}08 = \underline{{}^{+}51{,}88\ MPa}$$

$$\underline{\tau_A} = \frac{M_{cs}}{I_p}\frac{D}{2} = \frac{60 \cdot 10^3}{63814}\frac{30}{2} = \underline{14{,}10\ MPa}$$

$$\boxed{\sigma_{red,MOHR} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_A^2 + 4\tau_A^2} = \sqrt{51{,}88^2 + 4 \cdot 14{,}1^2} = 59{,}05\ MPa}$$





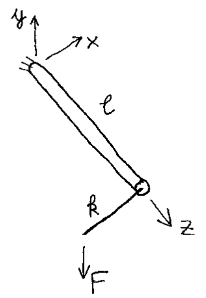


$$\underline{\underline{\sigma}}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\tau_A \\ 0 & 0 & 0 \\ -\tau_A & 0 & \sigma_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -14{,}1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -14{,}1 & 0 & 51{,}88 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Megjegyzés:
A kiskockát úgy vettük ki az anyagból, hogy a nyírófeszültség az x' tengellyel párhuzamos legyen. Így csak egy nyírófeszültség-komponens lesz a tenzorban.
A síkbeli feszültségállapot miatt az egyszerűsített képlet is használható.
A redukált feszültség definíciós képletét mindig adjuk meg, és a kocka szimbólummal jelezzük, hogy a síkbeli feszültségállapot miatt használjuk az egyszerűsített képletet.

4. példa: Méretezési feladat.

Mekkora legyen a kör keresztmetszetű konzol átmérője, hogy sehol ne lépjük túl a megengedett feszültséget? A Morh elmélet szerint számoljunk! A k kart nem kell méretezni, csak a hengeres konzolt.



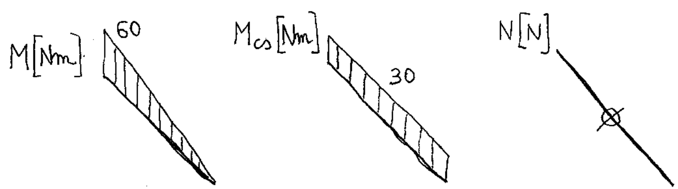
$F = 100\ N$

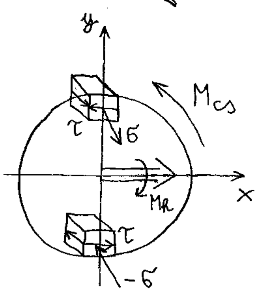
$\ell = 0{,}6\ m$

$k = 0{,}3\ m$

$\sigma_{meg} = 100\ MPa$ (MOHR)

$d = ?$





$$M_k = F\ell = 100 \cdot 0{,}6 = 60\ Nm$$

$$M_{cs} = Fk = 100 \cdot 0{,}3 = 30\ Nm$$

$$\sigma = \frac{M_k}{I}\frac{d}{2} = \frac{M_k}{\frac{d^4\pi}{64}}\frac{d}{2} = \frac{32\,M_k}{d^3\pi}$$

$$\tau = \frac{M_{cs}}{I_p}\frac{d}{2} = \frac{M_{cs}}{\frac{d^4\pi}{32}}\frac{d}{2} = \frac{16\,M_{cs}}{d^3\pi}$$

$$\sigma_{meg} \geq \sigma_{red,MOHR} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{32\,M_k}{d^3\pi}\right)^2 + 4\left(\frac{16\,M_{cs}}{d^3\pi}\right)^2} =$$

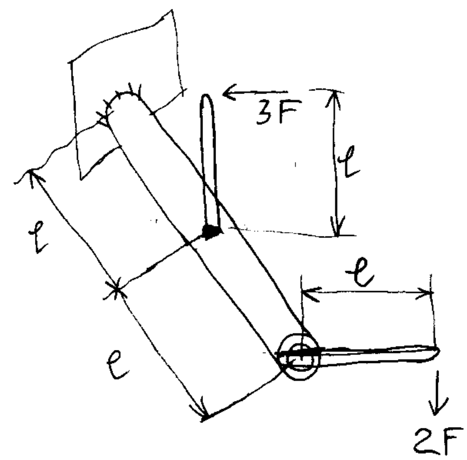
$$= \frac{1}{d^3\pi}\sqrt{(32\,M_k)^2 + 4(16\,M_{cs})^2}$$

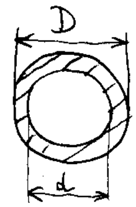
$$\boxed{d \geq \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(32\,M_k)^2 + 4(16\,M_{cs})^2}}{\sigma_{meg}\,\pi}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(32 \cdot 60 \cdot 10^3)^2 + 4(16 \cdot 30 \cdot 10^3)^2}}{100\,\pi}} = 18{,}98\ mm}$$

Megjegyzés:
A síkbeli feszültségállapot miatt az egyszerűsített képlet is használható.
A redukált feszültség definíciós képletét mindig adjuk meg, és a kocka szimbólummal jelezzük, hogy a síkbeli feszültségállapot miatt használjuk az egyszerűsített képletet.

5. példa: Szilárdsági ellenőrzés.

Számítsuk ki a szerkezet biztonsági tényezőjét! A redukált feszültség meghatározásánál a HMH elméletet használjuk!





$D = 50\ mm$

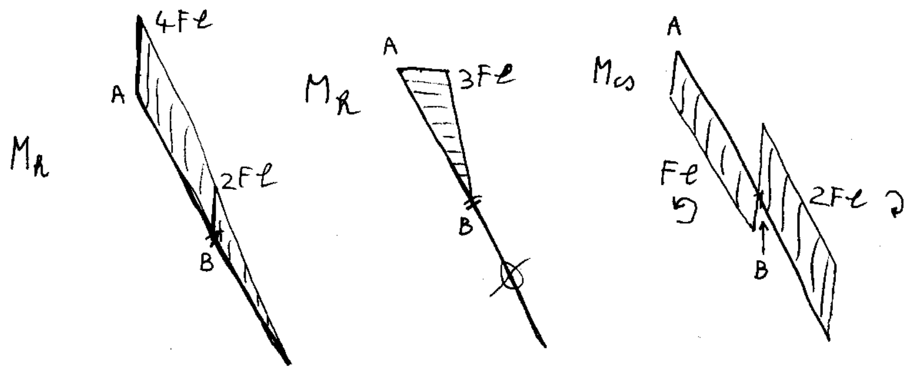
$d = 35\ mm$

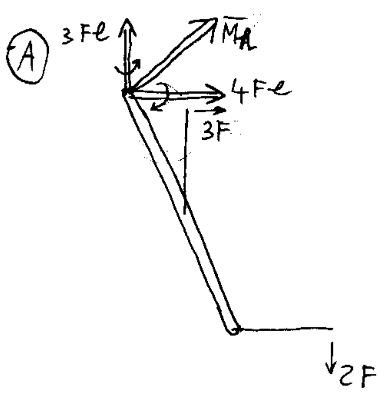
$F = 100\ N$

$\ell = 500\ mm$

$\sigma_{meg} = 120\ MPa$

$n = ?$





$$M_h^{(A)} = \sqrt{(3F\ell)^2 + (4F\ell)^2} = 5F\ell$$

$$M_{cs}^{(A)} = F\ell$$

B

$$M_h^{(B)} = 2F\ell$$

$$M_{cs}^{(B)} = 2F\ell$$

$$I = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{64} = \frac{(50^4 - 35^4)\pi}{64} = 233\,134\ mm^4$$

$$I_p = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{32} = 2 \cdot I = 466\,268\ mm^4$$

$$\sigma = \frac{M_h}{I}\,\frac{D}{2} = \frac{M_h}{233\,134}\,\frac{50}{2} = \frac{M_h}{9325}$$

$$\tau = \frac{M_{cs}}{I_p}\,\frac{D}{2} = \frac{M_{cs}}{466268}\,\frac{50}{2} = \frac{M_{cs}}{18651}$$

$$\sigma_{red,HMH} = \sqrt{F_I^2 - 3F_{II}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_h}{9325}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{cs}}{18651}\right)^2}$$

(A)
$$M_h^{(A)} = 5F\ell = 5 \cdot 100 \cdot 500 = 2{,}5 \cdot 10^5\ Nmm$$
$$M_{cs}^{(A)} = F\ell = 100 \cdot 500 = 5 \cdot 10^4\ Nmm$$
$$\sigma_{red,HMH}^{(A)} = \sqrt{\left(\frac{2{,}5 \cdot 10^5}{9325}\right)^2 + 3\left(\frac{5 \cdot 10^4}{18651}\right)^2} = 27{,}21\ MPa$$

(B)
$$M_h^{(B)} = 2F\ell = 2 \cdot 100 \cdot 500 = 10^5\ Nmm$$
$$M_{cs}^{(B)} = 2F\ell = 2 \cdot 100 \cdot 500 = 10^5\ Nmm$$
$$\sigma_{red,HMH}^{(B)} = \sqrt{\left(\frac{10^5}{9325}\right)^2 + 3\left(\frac{10^5}{18651}\right)^2} = 14{,}19\ MPa$$

Mivel az A pontban adódott a nagyobb redukált feszültség, a biztonsági tényezőt $\sigma_{red,HMH}^{(A)}$ felhasználásával számítjuk:

$$n = \frac{\sigma_{meg}}{\sigma_{red,HMH}^{(A)}} = \frac{120}{27{,}21} = 4{,}41$$

Megjegyzés:

Az A és a B pontot is meg kellett vizsgálnunk, mert az igénybevételek alapján nem lehetett eldönteni, hogy melyikben adódik majd a nagyobb feszültség.

A kiszámított n valójában az A pontban fellépő tönkremenetellel szembeni n_A biztonsági tényező. Mivel ebben a pontban a legnagyobb a redukált feszültség, itt a legkisebb a biztonsági tényező, ami egyben az egész szerkezet tönkremenetellel szembeni biztonsági tényezője is.

$\sigma_{red,HMH}^{(B)}$ alapján is számítható egy n_B biztonsági tényező, ami a B pontban fellépő tönkremenetellel szembeni biztonságot jellemzi.

A redukált feszültség definíciós képletét mindig adjuk meg, és a kocka szimbólummal jelezzük, hogy a síkbeli feszültségállapot miatt használjuk az egyszerűsített képletet.