1. Kétdimenziós vektorok és 2x2-es mátrixok

Nyomtatásban a mátrixokat vastag nagybetűvel, a vektorokat vastag kisbetűvel jelöljük. A vektorok alapértelmezésben oszlopvektorok.

1.1. Vektorok skalárszorzata

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}=\begin{bmatrix} \mathrm{u}_{\mathrm{x}} & \mathrm{u}_{\mathrm{y}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{v}_{\mathrm{x}} \\ \mathrm{v}_{\mathrm{y}} \end{bmatrix}=\mathrm{u}_{\mathrm{x}}\mathrm{v}_{\mathrm{x}}+\mathrm{u}_{\mathrm{y}}\mathrm{v}_{\mathrm{y}}$$

1.2. Skalár és mátrix szorzata

$$c\,\mathbf{A}=c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix}$$

1.3. Mátrix és vektor szorzata

$$\mathbf{Av}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}v_x+a_{12}v_y \\ a_{21}v_x+a_{22}v_y \end{bmatrix}$$

1.4. Vektor és mátrix szorzata

$$\mathbf{v}^T\mathbf{A}=\begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_xa_{11}+v_ya_{21} & v_xa_{12}+v_ya_{22} \end{bmatrix}$$

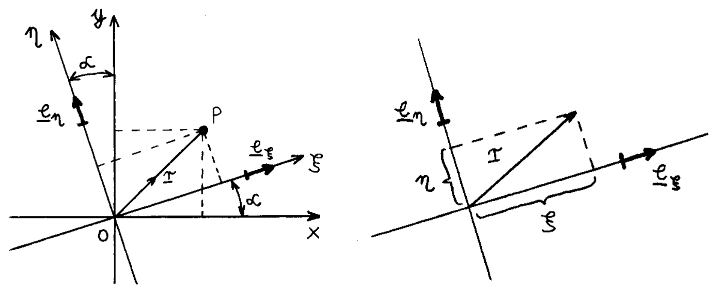
1.5. Mátrix szorzása mindkét oldalról

$$\mathbf{u}^T\mathbf{Av}=\mathbf{u}^T(\mathbf{Av})=\begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}v_x+a_{12}v_y \\ a_{21}v_x+a_{22}v_y \end{bmatrix}=$$
$$=u_x\left(a_{11}v_x+a_{12}v_y\right)+u_y\left(a_{21}v_x+a_{22}v_y\right)$$

$$\mathbf{u}^T\mathbf{Av}=\left(\mathbf{u}^T\mathbf{A}\right)\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_xa_{11}+u_ya_{12} & u_xa_{21}+u_ya_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}=$$
$$=u_x\left(a_{11}v_x+a_{12}v_y\right)+u_y\left(a_{21}v_x+a_{22}v_y\right)$$

2. Kétdimenziós (síkbeli) koordinátatranszformáció

Adottak egy pont koordinátái az xy rendszerben. A feladat a pont koordinátáinak kiszámítása az elforgatott $\xi\eta$ rendszerben. Mindkét koordinátarendszer derékszögű, origójuk egybeesik, de a tengelyek szögállása eltérő. Az xy rendszerben a pont helyvektora $\mathbf{r}$, amelynek koordinátái r_x és r_y. A $\xi\eta$ rendszerben a helyvektor $\boldsymbol{\rho}$ (ró), a koordináták pedig ρ_ξ és ρ_η.



A P pont új koordinátái az $\mathbf{r}$ vektornak az új tengelyekre vetített vetületi hosszaként adódnak. Felhasználva, hogy egy vektor vetületének hossza egy egyenesre a vektor és az egyenes irány-egységvektorának skaláris szorzata, az új koordináták a következők szerint számíthatók. A ξ tengely irányú egységvektor $\mathbf{e}_\xi$, amelynek koordinátái az xy rendszerben $e_{\xi,x}$ és $e_{\xi,y}$. Az η tengely irányú egységvektor pedig $\mathbf{e}_\eta$, amelynek koordinátái az xy rendszerben $e_{\eta,x}$ és $e_{\eta,y}$. Ezekkel a jelölésekkel a skalárszorzatok:

$$\rho_\xi = \mathbf{e}_\xi^T \mathbf{r} = \begin{bmatrix} e_{\xi,x} & e_{\xi,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = e_{\xi,x} r_x + e_{\xi,y} r_y$$

$$\rho_\eta = \mathbf{e}_\eta^T \mathbf{r} = \begin{bmatrix} e_{\eta,x} & e_{\eta,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = e_{\eta,x} r_x + e_{\eta,y} r_y$$

Az előző két skalárszorzás egyben is elvégezhető, ha definiáljuk a $\mathbf{T}$ transzformációs mátrixot, amelyben sorvektorként szerepelnek az új koordinátatengelyek egységvektorai:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\xi^T \\ \mathbf{e}_\eta^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{\xi,x} & e_{\xi,y} \\ e_{\eta,x} & e_{\eta,y} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{T}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} e_{\xi,x} & e_{\xi,y} \\ e_{\eta,x} & e_{\eta,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{\xi,x} r_x + e_{\xi,y} r_y \\ e_{\eta,x} r_x + e_{\eta,y} r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_\xi \\ \rho_\eta \end{bmatrix}$$

Ha csak az egyik koordinátát – vagy ami ezzel azonos, az egyik tengelytől vett távolságot – kell kiszámítani, akkor nem érdemes transzformációs mátrixot használni, de ha mindkettőt, akkor igen.

3. Háromdimenziós vektorok és 3x3-as mátrixok

3.1. Vektorok skalárszorzata

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}=\begin{bmatrix}u_x & u_y & u_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{bmatrix}=u_x v_x+u_y v_y$$

3.2. Skalár és mátrix szorzata

$$c\,\mathbf{A}=c\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ca_{11} & ca_{12} & ca_{13}\\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23}\\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33}\end{bmatrix}$$

3.3. Mátrix és vektor szorzata

$$\mathbf{Av}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}v_x+a_{12}v_y+a_{13}v_z\\ a_{21}v_x+a_{22}v_y+a_{23}v_z\\ a_{31}v_x+a_{32}v_y+a_{33}v_z\end{bmatrix}$$

3.4. Vektor és mátrix szorzata

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}v_x & v_y & v_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}v_x a_{11}+v_y a_{21}+v_z a_{31} & v_x a_{12}+v_y a_{22}+v_z a_{32} & v_x a_{13}+v_y a_{23}+v_z a_{33}\end{bmatrix}$$

3.5. Mátrix szorzása mindkét oldalról

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{Av}=\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Av})=\begin{bmatrix}u_x & u_y & u_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_x & u_y & u_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}v_x+a_{12}v_y+a_{13}v_z\\ a_{21}v_x+a_{22}v_y+a_{23}v_z\\ a_{21}v_x+a_{22}v_y+a_{23}v_z\end{bmatrix}=$$

$$=u_x\left(a_{11}v_x+a_{12}v_y+a_{13}v_z\right)+u_y\left(a_{21}v_x+a_{22}v_y+a_{23}v_z\right)+u_z\left(a_{31}v_x+a_{32}v_y+a_{33}v_z\right)$$

3.6. 3x3-as determináns kifejtése

1. sor szerint:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

2. sor szerint:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

3. sor szerint:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

1. oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

2. oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

3. oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Sakktábla-szabály:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$