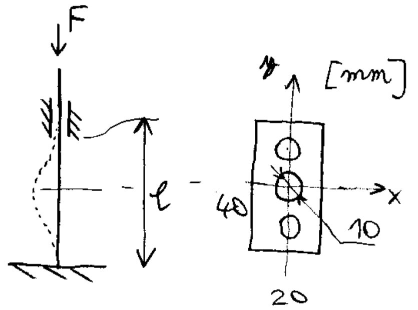
1. példa:

Számítsuk ki a kihajlással szembeni biztonsági tényezőt!



$F = 20\,kN$

$\ell = 1{,}5\,m$

$\sigma_{kr} = 310 - 1{,}14\,\lambda$

$\lambda_0 = 100$

$E = 210\ GPa$

$n = ?$

$$\ell_0 = 0{,}5\,\ell = 750\ mm$$

$$I_{min} = I_y = \frac{20^3 \cdot 40}{12} - 3\,\frac{10^4 \pi}{64} = 25\,194\ mm^4$$

$$A = 20 \cdot 40 - 3\,\frac{10^2 \pi}{4} = 564{,}4\ mm^2$$

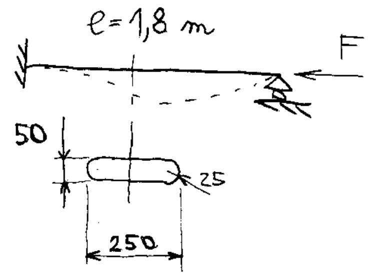
$$\lambda = \frac{\ell_0}{i} = \frac{\ell_0}{\sqrt{\frac{I_{min}}{A}}} = \frac{750}{\sqrt{\frac{25194}{564{,}4}}} = 112{,}3 > \lambda_0 \longrightarrow \text{Euler}$$

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 I_{min} E}{\ell_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 25\,194 \cdot 210 \cdot 10^3}{750^2} = 92\,831\ N$$

$$n = \frac{F_{kr}}{F} = \frac{92\,831}{20\,000} = 4{,}64$$

2. példa:

Mekkora erővel terhelhető a befogott, megtámasztott rúd, ha a kihajlással szemben előírt biztonsági tényező n=3?



$E = 210\ GPa$

$\sigma_{kr} = 310 - 1{,}14\,\lambda$

$\lambda_0 = 110$

$n = 3$

$F = ?$

$$\ell_0 = 0{,}7\cdot\ell = 1260\ mm$$

$$I_{min} = \frac{50^3\cdot 200}{12} + \frac{50^4\pi}{64} = 2{,}39\cdot 10^6\ mm^4$$

$$A = 200\cdot 50 + \frac{50^2\pi}{4} = 11\,963\ mm^2$$

$$\lambda = \frac{\ell_0}{i} = \frac{\ell_0}{\sqrt{\frac{I_{min}}{A}}} = \frac{1260}{\sqrt{\frac{2{,}39\cdot 10^6}{11\,963}}} = 89{,}14 < \lambda_0 \rightarrow \text{Tetmajer}$$

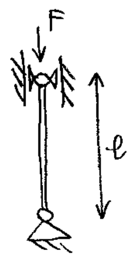
$$\sigma_{kr} = 310 - 1{,}14\lambda = 310 - 1{,}14\cdot 89{,}14 = 208{,}4\ MPa$$

$$n = \frac{F_{kr}}{F} \qquad \sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A}$$

$$F = \frac{\sigma_{kr}\,A}{n} = \frac{208{,}4\cdot 11\,963}{3} = 831\,030\ N$$

3. példa:

Mekkora erővel terhelhető a tömör kör keresztmetszetű és a cső szelvényű rúd?



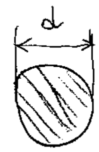
$E = 210\,GPa$

$\ell = 4{,}5\,m$

$\lambda_0 = 100$

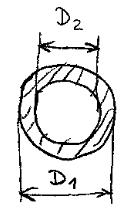
$\sigma_{kr} = 310 - 1{,}14\lambda$

$n = 3{,}5$



$d = 95\,mm$

$F_1 = ?$



$D_1 = 216\,mm$

$D_2 = 194\,mm$

$F_2 = ?$

$\ell_0 = \ell$

(1)

$$\lambda_1 = \frac{\ell_0}{i_1} \qquad i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A_1}} \qquad I_1 = \frac{d^4\pi}{64} \qquad A_1 = \frac{d^2\pi}{4} \qquad i_1 = \frac{d}{4}$$

$$\lambda_1 = 4\frac{\ell}{d} = 4\frac{4500}{95} = 189{,}5 \quad > \lambda_0$$

$$n F_1 \le F_{kr1} = \frac{\pi^2 I E}{\ell_0^2}$$

$$F_1 \le \frac{\pi^2 I E}{n \ell_0^2} = \frac{\pi^2 \frac{d^4\pi}{64} E}{n \ell^2} = \frac{\pi^3 d^4 E}{64 n \ell^2} = \frac{\pi^3 \cdot 95^4 \cdot 210 \cdot 10^3}{64 \cdot 3{,}5 \cdot 4500^2} = 116{,}9\,kN$$

(2)

$$I_2 = \frac{(D_1^4 - D_2^4)\pi}{64} = \frac{(216^4 - 194^4)\pi}{64} = 3{,}732 \cdot 10^7\,mm^4$$

$$A_2 = \frac{(D_1^2 - D_2^2)\pi}{4} = \frac{(216^2 - 194^2)\pi}{4} = 7084\,mm^2$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A_2}} = \sqrt{\frac{3{,}732 \cdot 10^7}{7084}} = 72{,}58\,mm$$

$$\lambda_2 = \frac{\ell_0}{i_2} = \frac{\ell}{i_2} = \frac{4500}{72{,}58} = 62{,}00 \quad < \lambda_0$$

$$\sigma_{kr2} = 310 - 1{,}14\lambda_2 = 310 - 1{,}14 \cdot 62 = 239{,}3\,MPa$$

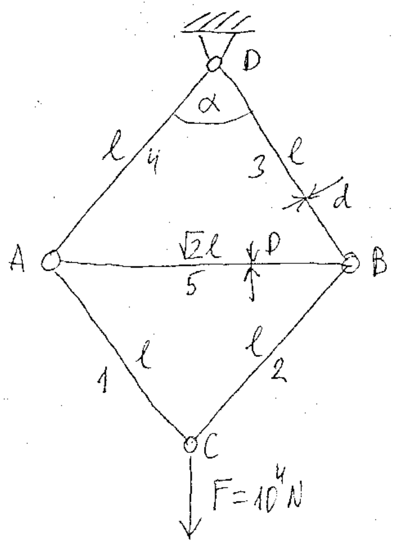
$$n F_2 \le \sigma_{kr2} A_2$$

$$F_2 \le \frac{\sigma_{kr2} A_2}{n} = \frac{239{,}3 \cdot 7084}{3{,}5} = 484{,}3\,kN$$

Megjegyzés:
Az első esetben Eurler, a másodikban Tetmayer szerint kellett számolni.

4. példa: Rácsos szerkezet.

Mekkora a szerkezet kihajlással szembeni biztonsági tényezője?



$$(\sqrt{2}\ell)^2 = \ell^2 + \ell^2 - 2\ell^2\cos\alpha \qquad \alpha = 90^\circ$$

$$\sum F_y = 0 \qquad -F + 2S_1\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad S_1 = \frac{F}{\sqrt{2}} = S_2 = S_3 = S_4$$

$$F_{tAB} = 2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{F}{\sqrt{2}} = F$$

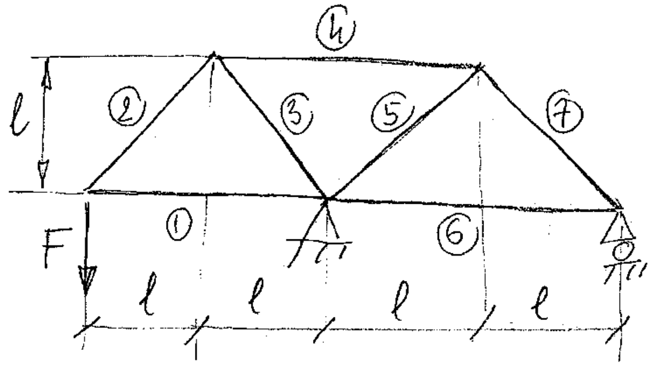
$$F_t = \frac{\pi^2 J E}{\ell^2} = \frac{\pi^2\,\frac{0{,}03^4\pi}{64}\,2\cdot 10^{11}}{(\sqrt{2}\ell)^2} = 39242\ N$$

$$n_{AB} = \frac{F_t}{F_{tAB}} \cong 4$$

Megjegyzés:
Csak az AB rúd nyomott, ezért csak azt kell kihajlásra ellenőrizni.

5. példa: Rácsos szerkezet.

Mekkora lehet az F erő, ha a szerkezet kihajlással szembeni előírt biztonsági tényezője n=3?



$l = 1\,m \quad E = 2{,}1 \cdot 10^{11}\,Pa$

$d = 0{,}02\,m \quad n = 3$

$F = ?$

$N_1 = -F \quad N_2 = \sqrt{2}\,F \quad N_3 = -\sqrt{2}\,F \quad N_4 = 2F$

$N_5 - \sqrt{2}\,F \quad N_6 = -F \quad N_7 = \sqrt{2}\,F$

$$I = \frac{d^4\pi}{64} = \frac{0{,}02^4\pi}{64} = 7{,}854 \cdot 10^{-9}\,m^4$$

$$N_3 = \frac{F_{3kr}}{n} = \frac{\pi^2}{n} \cdot \frac{IE}{l_3^2} = \frac{\pi^2}{3} \frac{7{,}854 \cdot 10^{-9} \cdot 2{,}1 \cdot 10^{11}}{(\sqrt{2} \cdot 1)^2} = 2713\,N$$

$$N_1 = \frac{F_{1kr}}{n} = \frac{\pi^2}{n} \frac{IE}{l_1^2} = \frac{\pi^2}{3} \frac{7{,}854 \cdot 10^{-9} \cdot 2{,}1 \cdot 10^{11}}{(2 \cdot 1)^2} = 1356{,}5\,N$$

$$F_1 = N_1 = 1356{,}5\,N$$

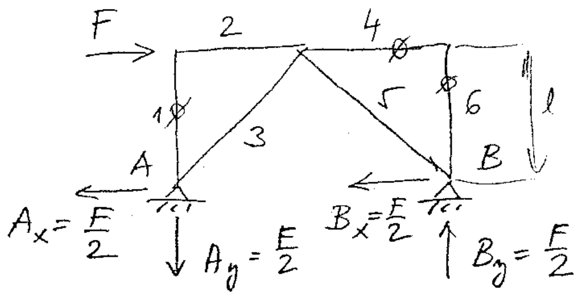
$$F_3 = \frac{N_3}{\sqrt{2}} = \frac{2713}{\sqrt{2}} = 1918{,}4\,N$$

$$F = \min(F_1, F_3) = F_1 = 1356{,}5\,N$$

Megjegyzés:
Csak a nyomott rudakat kell ellenőrizni.

6. példa: Rácsos szerkezet.

Mekkora lehet az F erő, ha a szerkezet kihajlással szembeni előírt biztonsági tényezője n=3?



$S_1 = 0$; $S_2 = -F$, $S_3 = \frac{F\sqrt{2}}{2}$

$S_4 = 0$ $S_5 = -\frac{F\sqrt{2}}{2}$ $S_6 = 0$

$d = 10\,mm$ $\ell = 1\,m$ $n = 3$

Nyomott: 2 és 5.

$$F_{t2} = \frac{\pi^2 IE}{\ell^2} \cong 1017\,N$$

$$S_2 = F \leq \frac{F_{t2}}{n} \cong 339\,N$$

$$F_{t5} = \frac{\pi^2 IE}{(\ell\sqrt{2})^2} \cong 509\,N$$

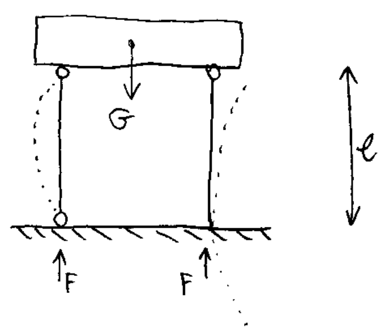
$$S_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{F_{t5}}{n}\ ; \quad F \leq \frac{\sqrt{2}F_{t5}}{n} \approx 240\,N$$

Teherbírás: $F = 240\,N$

Megjegyzés:
Csak a nyomott rudakat kell ellenőrizni.

7. példa: Méretezési feladat.

Mekkora átmérőjű rudakat kell választanunk, hogy a szerkezet kihajással szembeni biztonsági tényezője n=5 legyen?



$G = 200\ kN$

$E = 210\ GPa$

$\ell = 1{,}2\ m$

$\sigma_{kr} = 310 - 1{,}14\,\lambda$

$\lambda_0 = 100$

$n = 5$

$d = ?$

$$\ell_0 = 2\ell = 2400\ mm$$

$$F = \frac{G}{2} = 100\ kN$$

$$n \leq \frac{F_{kr}}{F}$$

$$nF \leq \frac{\pi^2 I E}{\ell_0^2} = \frac{\pi^2 \frac{d^4 \pi}{64} E}{\ell_0^2}$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{64\, n F \ell_0^2}{\pi^3 E}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 5 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 2400^2}{\pi^3 \cdot 210 \cdot 10^3}} = 72{,}94\ mm$$

$$\lambda = \frac{\ell_0}{i} = \frac{\ell_0}{\sqrt{\frac{I}{A}}} = \frac{\ell_0}{\sqrt{\frac{\frac{d^4 \pi}{64}}{\frac{d^2 \pi}{4}}}} = \frac{\ell_0}{\sqrt{\frac{d^2}{16}}} = \frac{\ell_0}{d/4} = \frac{4\ell_0}{d}$$

$$\lambda = \frac{4\ell_0}{d} = \frac{4 \cdot 2400}{72{,}94} = 131{,}6 \quad > \lambda_0 \rightarrow \text{Euler OK}$$

$$d \geq 72{,}94\ mm$$

Megjegyzés:

Feltételeztük, hogy $\lambda > \lambda_0$ eset lesz, és Euler szerint méreteztük a d átmérőt. Ezután ellenőriztük, hogy a meghatározott méretű rúd karcsúsága tényleg a $\lambda > \lambda_0$ tartományba esik. Az jött ki, hogy igen, tehát a kiszámolt d átmérő elfogadható.