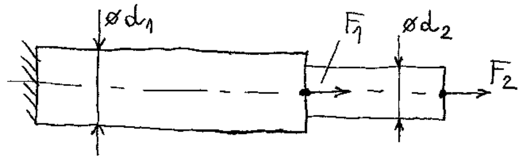
1. példa: Az 1. gyakorlat 1. példájához hasonló feladat.

Ellenőrizzük, hogy a változó keresztmetszetű rúd szilárdságilag megfelel-e?
Számítsuk ki a teljes hosszváltozást!

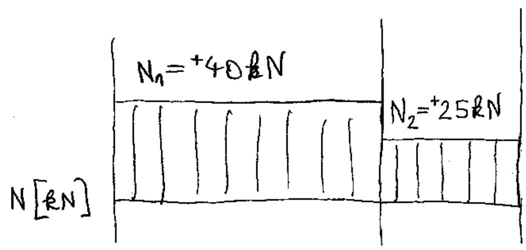


$F_1 = 15\,kN \qquad F_2 = 25\,kN$

$\ell_1 = 800\,mm \qquad \ell_2 = 500\,mm$

$d_1 = 30\,mm \qquad d_2 = 20\,mm$

$E = 2{,}1 \cdot 10^5\,MPa \qquad \sigma_{meg} = 90\,MPa$



$$A_1 = \frac{d_1^2 \pi}{4} = \frac{30^2 \pi}{4} = 706{,}9\,mm^2$$

$$A_2 = \frac{d_2^2 \pi}{4} = \frac{20^2 \pi}{4} = 314{,}2\,mm^2$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{+40 \cdot 10^3}{706{,}9} = +56{,}59\,MPa \rightarrow |\sigma_1| \leq \sigma_{meg} \ \checkmark OK$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{+25 \cdot 10^3}{314{,}2} = +79{,}57\,MPa \rightarrow |\sigma_2| \leq \sigma_{meg} \ \checkmark OK$$

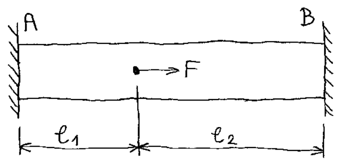
$$\boxed{\lambda} = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{N_1 \ell_1}{A_1 E} + \frac{N_2 \ell_2}{A_2 E} = \frac{+40 \cdot 10^3 \cdot 800}{706{,}9 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5} + \frac{+25 \cdot 10^3 \cdot 500}{314{,}2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5} =$$

$$\boxed{= +0{,}405\,mm}$$

Megjegyzés:
A megengedett feszültséggel történő összehasonlításban szereplő abszolútérték arra utal, hogy a normálfeszültség se húzó, se nyomó irányban nem lépheti túl a megengedett értéket.

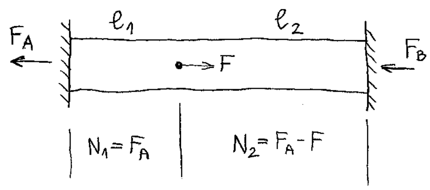
2. példa: Az 1. gyakorlat 2. példájához hasonló feladat.

A két végén befalazott, állandó keresztmetszetű rudat F erő terheli. Rajzoljuk meg a normálerő igénybevételi ábrát!



$\ell_1 = 200\ mm$
$\ell_2 = 300\ mm$
$F = 10\ kN$

N-ábra?



$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

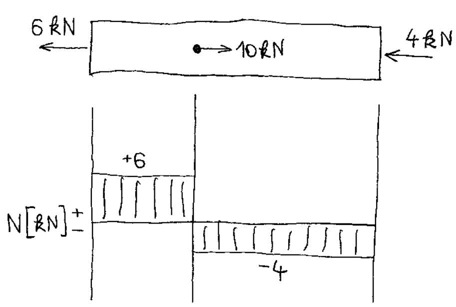
$$\frac{N_1 \ell_1}{AE} + \frac{N_2 \ell_2}{AE} = 0$$

$$\frac{F_A \ell_1}{AE} + \frac{(F_A - F)\ell_2}{AE} = 0$$

$$\underline{F_A} = F\frac{\ell_2}{\ell_1+\ell_2} = 10\,\frac{300}{200+300} = \underline{6\ kN\ (\leftarrow)}$$

$$\sum F_x = 0 = -F_A + F - F_B$$

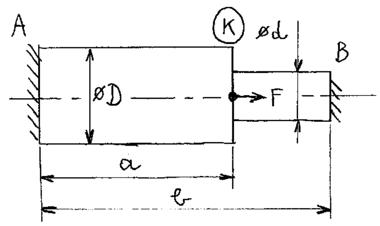
$$\underline{F_B} = F - F_A = 10 - 6 = \underline{4\ kN\ (\leftarrow)}$$



Megjegyzés:
Bár az A és E érték nem volt megadva, a képletek felírásánál úgy tettünk, mintha ismertek lennének. Bíztunk abban, hogy majd kiesnek az egyszerűsítés folyamán. Ez így is lett, mert az állandó keresztmetszet és az állandó rugalmassági modulus miatt a két rész merevségének aránya csak a hosszak arányának függvénye.
A hosszúságokat azért nem kellett átváltani mm-re, mert csak az arányuk szerepel a képletben.
Az ismeretlen normálerők felírásánál mindig balra néztünk, így csak az F_A reakció szerepel a képletekben. Gyakorlásképpen megoldhatjuk úgy a feladatot, hogy mindig jobbra nézve (F_B-vel) írjuk föl az ismeretlen normálerőket.

3. példa: Ez is az 1. gyakorlat 2. példájához hasonló feladat.

A két végén befalazott, változó keresztmetszetű rudat F erő terheli. Határozzuk meg a reakcióerőket, és rajzoljuk meg a normálerő igénybevételi ábrát! Számítsuk ki az egyes szakaszokban ébredő feszültséget! Mekkora és milyen irányú a K keresztmetszet elmozdulása?



$D = 4\ cm$

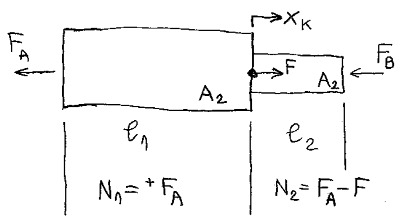
$d = 3\ cm$

$a = 60\ cm$

$b = 90\ cm$

$E = 210\ GPa$

$F = 100\ kN$



$\ell_1 = 60\ cm$

$\ell_2 = 30\ cm$

$$A_1 = \frac{D^2\pi}{4} = \frac{4^2\pi}{4} = 12{,}57\ cm^2$$

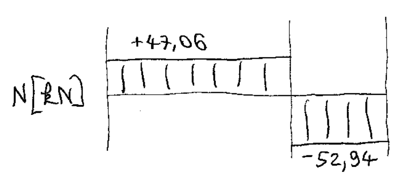
$$A_2 = \frac{d^2\pi}{4} = \frac{3^2\pi}{4} = 7{,}069\ cm^2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{N_1 \ell_1}{A_1 E_1} + \frac{N_2 \ell_2}{A_2 E_2} = 0$$

$$\frac{F_A \ell_1}{A_1 E} + \frac{(F_A - F)\ell_2}{A_2 E} = 0$$

$$\boxed{F_A = \frac{F \frac{\ell_2}{A_2}}{\frac{\ell_1}{A_1} + \frac{\ell_2}{A_2}} = \frac{F}{\frac{\ell_1}{\ell_2}\frac{A_2}{A_1} + 1} = \frac{100}{\frac{60}{30}\frac{7{,}069}{12{,}57} + 1} = 47{,}06\ kN\ (\leftarrow)}$$

$$\sum F_x = 0 = -F_A + F - F_B \rightarrow \boxed{F_B = F - F_A = 100 - 47{,}06 = 52{,}94\ kN (\rightarrow)}$$



$N_1 = F_A = 47{,}06\ kN$ (h)

$N_2 = -F_B = -52{,}94\ kN$ (ny)

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{47{,}06 \cdot 10^3}{12{,}57 \cdot 10^2} = 37{,}44\ MPa}$$

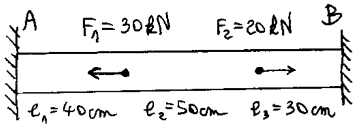
$$\boxed{\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-52{,}94 \cdot 10^3}{7{,}069 \cdot 10^2} = -74{,}89\ MPa}$$

$$\boxed{x_K = \lambda_1 = \frac{N_1 \ell_1}{A_1 E_1} = \frac{+47{,}06 \cdot 10^3 \cdot 600}{12{,}57 \cdot 10^2 \cdot 210 \cdot 10^3} = 0{,}1070\ mm\ (\rightarrow)}$$

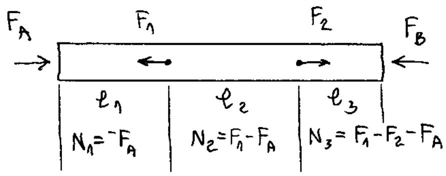
Megjegyzés:
A hosszúságokat azért nem kellett átváltani mm-re, mert csak az arányuk szerepel a képletben.
Az ismeretlen normálerők felírásánál mindig balra néztünk, így csak az F_A reakció szerepel a képletekben. Gyakorlásképpen megoldhatjuk úgy a feladatot, hogy mindig jobbra nézve (F_B-vel) írjuk föl az ismeretlen normálerőket.

4. példa: Itt már három erő van.

Számítsuk ki a reakcióerőket, és rajzoljuk meg a normálerő igénybevételi ábrát!



$F_A = ?$
$F_B = ?$
N-ábra ?



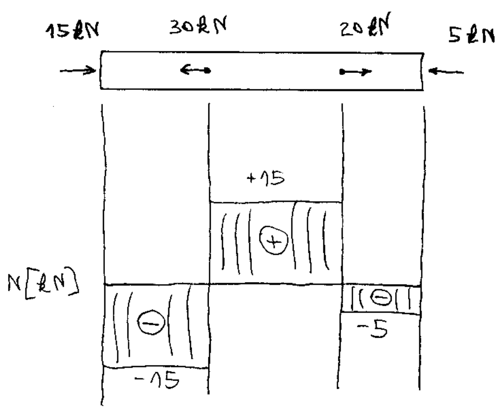
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\frac{-F_A \ell_1}{AE} + \frac{(F_1 - F_A)\ell_2}{AE} + \frac{(F_1 - F_2 - F_A)\ell_3}{AE} = 0$$

$$\boxed{F_A = \frac{F_1(\ell_2 + \ell_3) - F_2 \ell_3}{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3} = \frac{30(50+30) - 20 \cdot 30}{40+50+30} = 15\,kN\ (\rightarrow)}$$

$$\sum F_x = 0 = F_A - F_1 + F_2 - F_B$$

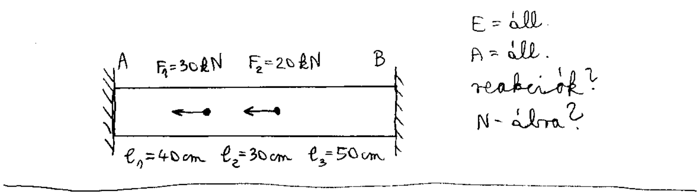
$$\boxed{F_B = F_A - F_1 + F_2 = 15 - 30 + 20 = 5\,kN\ (\leftarrow)}$$

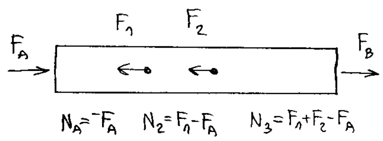


Megjegyzés:
Bár az A és E érték nem volt megadva, a képletek felírásánál úgy tettünk, mintha ismertek lennének. Bíztunk abban, hogy majd kiesnek az egyszerűsítés folyamán. Ez így is lett, mert az állandó keresztmetszet és az állandó rugalmassági modulus miatt a két rész merevségének aránya csak a hosszak arányának függvénye.
A hosszúságokat azért nem kellett átváltani mm-re, mert csak az arányuk szerepel a képletben.
Az ismeretlen normálerők felírásánál mindig balra néztünk, így csak az F_A reakció szerepel a képletekben. Gyakorlásképpen megoldhatjuk úgy a feladatot, hogy mindig jobbra nézve (F_B-vel) írjuk föl az ismeretlen normálerőket.

5. példa: Itt is három erő van.

Számítsuk ki a reakcióerőket, és rajzoljuk meg a normálerő igénybevételi ábrát!





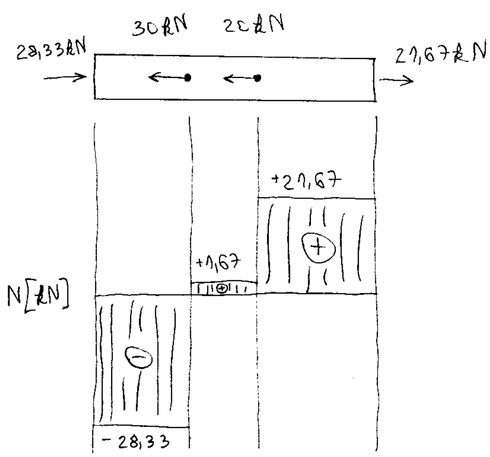
$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$$

$$\frac{-F_A \ell_1}{AE}+\frac{(F_1-F_A)\ell_2}{AE}+\frac{(F_1+F_2-F_A)\ell_3}{AE}=0$$

$$\boxed{F_A}=\frac{F_1(\ell_2+\ell_3)+F_2\ell_3}{\ell_1+\ell_2+\ell_3}=\frac{30(30+50)+20\cdot 50}{40+30+50}=\boxed{28{,}33\ kN\,(\rightarrow)}$$

$$\sum F_x=0=+F_A-F_1-F_2+F_B$$

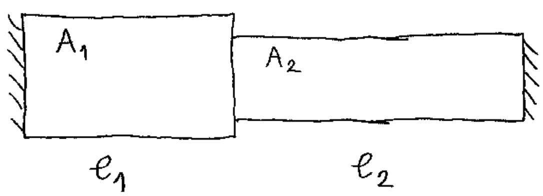
$$\boxed{F_B}=F_1+F_2-F_A=30+20-28{,}33=\boxed{21{,}67\ kN\,(\rightarrow)}$$



Megjegyzés:
Bár az A és E érték nem volt megadva, a képletek felírásánál úgy tettünk, mintha ismertek lennének. Bíztunk abban, hogy majd kiesnek az egyszerűsítés folyamán. Ez így is lett, mert az állandó keresztmetszet és az állandó rugalmassági modulus miatt a két rész merevségének aránya csak a hosszak arányának függvénye.
A hosszúságokat azért nem kellett átváltani mm-re, mert csak az arányuk szerepel a képletben.
Az ismeretlen normálerők felírásánál mindig balra néztünk, így csak az F_A reakció szerepel a képletekben. Gyakorlásképpen megoldhatjuk úgy a feladatot, hogy mindig jobbra nézve (F_B-vel) írjuk föl az ismeretlen normálerőket.

6. példa: Az 1. gyakorlat 4. feladata.

A változó keresztmetszetű acélrúd $t_0 = 0\ °C$ -on erő- és hézagmentesen illeszkedik a merev falak közé. A rúd hőmérsékletét $t_1 = 50\ °C$ -ra növeljük. A felmelegítés hatására mekkora lesz
- a rúd normálerő igénybevétele
- a rúd egyes szakaszain a normálfeszültség
- a rúd egyes szakaszain a fajlagos nyúlás
- a teljes alakváltozási energia?



$A_1 = 100\ cm^2 \qquad A_2 = 50\ cm^2$

$\ell_1 = 30\ cm \qquad \ell_2 = 60\ cm$

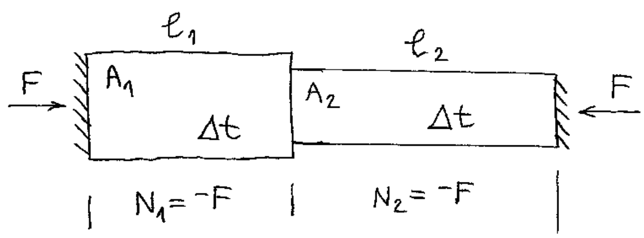
$E = 2 \cdot 10^5\ MPa \qquad \alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{°C}$

$N_1 = ? \quad N_2 = ? \quad W = ?$

$\varepsilon_1 = ? \quad \varepsilon_2 = ?$

$t_0 = 0\ °C \qquad t_1 = 50\ °C$

$\sigma_1 = ? \quad \sigma_2 = ?$



$$(\lambda_{t1} + \lambda_1) + (\lambda_{t2} + \lambda_2) = 0$$

$$\left(\alpha \ell_1 \Delta t + \frac{(-F)\,\ell_1}{A_1 E}\right) + \left(\alpha \ell_2 \Delta t + \frac{(-F)\,\ell_2}{A_2 E}\right) = 0$$

$$F = \frac{\alpha E (\ell_1 + \ell_2) \Delta t}{\frac{\ell_1}{A_1} + \frac{\ell_2}{A_2}} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot (300+600) \cdot 50}{\frac{300}{10\,000} + \frac{600}{5000}} = 720\,000\ N$$

$$\boxed{N_1 = N_2 = -F = -720\ kN}$$

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-720000}{10\,000} = -72\ MPa}$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-720000}{5000} = -144\ MPa}$$

$$\boxed{\varepsilon_1} = \frac{\Delta \ell_1}{\ell_1} = \frac{\lambda_{t1} + \lambda_1}{\ell_1} = \frac{\alpha \ell_1 \Delta t + \frac{N_1 \ell_1}{A_1 E}}{\ell_1} = \alpha \Delta t + \frac{\sigma_1}{E} =$$

$$= 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 50 + \frac{-72}{2 \cdot 10^{5}} = \boxed{+2{,}4 \cdot 10^{-4}}$$

$$\boxed{\varepsilon_2} = \frac{\Delta \ell_2}{\ell_2} = \frac{\alpha \ell_2 \Delta t + \frac{N_2 \ell_2}{A_2 E}}{\ell_2} = \alpha \Delta t + \frac{\sigma_2}{E} =$$

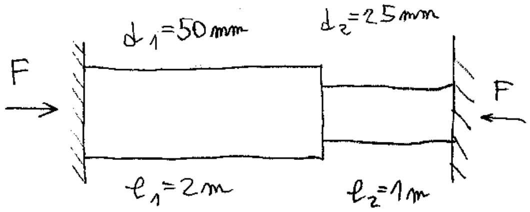
$$= 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 50 + \frac{-144}{2 \cdot 10^{5}} = \boxed{-1{,}2 \cdot 10^{-4}}$$

$$\boxed{W} = \sum W_i = \sum \frac{1}{2} \frac{N_i^2 \ell_i}{A_i E_i} = \frac{1}{2} \frac{F^2 \ell_1}{A_1 E} + \frac{1}{2} \frac{F^2 \ell_2}{A_2 E} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{E} \left(\frac{\ell_1}{A_1} + \frac{\ell_2}{A_2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{720000^2}{2 \cdot 10^{11}} \left(\frac{0{,}3}{100 \cdot 10^{-4}} + \frac{0{,}6}{50 \cdot 10^{-4}} \right) = \boxed{194{,}4 \text{ J}}$$

7. példa: Az 1. gyakorlat 4. példájához hasonló feladat.

A támaszokhoz erő- és hézagmentesen illeszkedő változó keresztmetszetű rúd hőmérsékletét $50\,°C$-kal megnöveljük. Mekkora lesz a reakcióerő, és az egyes szakaszokban ébredő feszültség? Mekkora és milyen irányú a keresztmetszet-változásnál az elmozdulás?



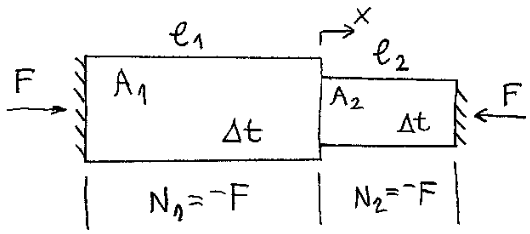
$E = 210\ GPa$

$\alpha = 12{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{°C}$

$\Delta t = 20\,°C$

$F = ?\quad \Delta x = ?$

$\sigma_1 = ?\quad \sigma_2 = ?$



$$A_1 = \frac{d_1^2 \pi}{4} = \frac{50^2 \pi}{4} = 1963\ mm^2$$

$$A_2 = \frac{d_2^2 \pi}{4} = \frac{25^2 \pi}{4} = 490{,}9\ mm^2$$

$$(\lambda_{t1} + \lambda_1) + (\lambda_{t2} + \lambda_2) = 0$$

$$\left(\alpha \ell_1 \Delta t + \frac{(-F)\,\ell_1}{A_1 E}\right) + \left(\alpha \ell_2 \Delta t + \frac{(-F)\,\ell_2}{A_2 E}\right) = 0$$

$$F = \frac{\alpha E (\ell_1 + \ell_2) \Delta t}{\frac{\ell_1}{A_1} + \frac{\ell_2}{A_2}} = \frac{12{,}5 \cdot 10^{-6} (2000 + 1000) \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 20}{\frac{2000}{1963} + \frac{1000}{490{,}9}} \boxed{= 51539\ N}$$

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{-F}{A_1} = \frac{51539}{1963} = -26{,}26\ MPa}$$

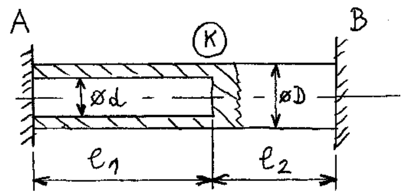
$$\boxed{\sigma_2 = \frac{-F}{A_2} = \frac{51539}{490{,}9} = -105{,}0\ MPa}$$

$$\Delta x = \lambda_{1t} + \lambda_1 = \alpha \ell_1 \Delta t + \frac{-F \ell_1}{A_1 E} = \ell_1 \left(\alpha \Delta t - \frac{F}{A_1 E}\right)$$

$$\boxed{\Delta x = 2000 \left(12{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 20 - \frac{51539}{1963 \cdot 210 \cdot 10^3}\right) = +0{,}2500\ mm\ (\rightarrow)}$$

8. példa: Az 1. gyakorlat 4. példájához hasonló feladat.

A furatos henger erő- és hézagmentesen illeszkedik a támaszok közé. Mekkora feszültségek ébrednek az egyes szakaszokban, ha az alkatrész hőmérsékletét $20\,°C$-ról $120\,°C$-ra növeljük? Mekkora és milyen irányú lesz a K keresztmetszet elmozdulása?



$D = 50\ mm$ $\qquad \sigma_1 = ?$

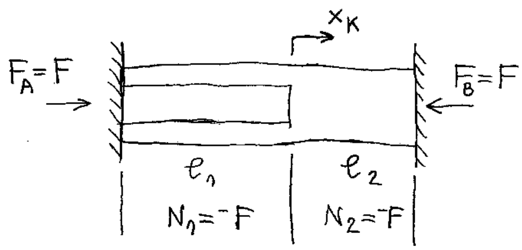
$d = 40\ mm$ $\qquad \sigma_2 = ?$

$\ell_1 = 150\ mm$ $\qquad x_K = ?$

$\ell_2 = 100\ mm$

$E = 0{,}7 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}$ $\qquad t_0 = 20\,°C$

$\alpha = 20 \cdot 10^{-6} \frac{1}{°C}$ $\qquad t_1 = 120\,°C$



$$A_1 = \frac{(D^2 - d^2)\pi}{4} = \frac{(50^2 - 40^2)\pi}{4} = 706{,}9\ mm^2$$

$$A_2 = \frac{D^2 \pi}{4} = \frac{50^2 \pi}{4} = 1963\ mm^2$$

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t = 100\ °C$$

$$(\lambda_{t1} + \lambda_1) + (\lambda_{t2} + \lambda_2) = 0$$

$$\left(\alpha \ell_1 \Delta t + \frac{(-F)\cdot \ell_1}{A_1 E}\right) + \left(\alpha \ell_2 \Delta t + \frac{(-F)\cdot \ell_2}{A_2 E}\right) = 0$$

$$F = \frac{\alpha E (\ell_1 + \ell_2)\Delta t}{\frac{\ell_1}{A_1} + \frac{\ell_2}{A_2}} = \frac{20 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}7 \cdot 10^5 (150 + 100) \cdot 100}{\frac{150}{706{,}9} + \frac{100}{1963}} = 133011\ N$$

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-F}{A_1} = \frac{-133011}{706{,}9} = -188{,}2\ MPa}$$

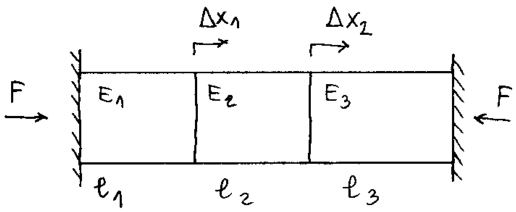
$$\boxed{\sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{-F}{A_2} = \frac{-133011}{1963} = -67{,}76\ MPa}$$

$$\boxed{x_K} = (\lambda_{t1} + \lambda_1) = \alpha \ell_1 \Delta t + \frac{(-F)\cdot \ell_1}{A_1 E} =$$

$$= 20 \cdot 10^{-6} \cdot 150 \cdot 100 + \frac{(-133011)\cdot 150}{706{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 10^5} = 0{,}3 - 0{,}4032 = \boxed{-0{,}1032\ mm\ (\leftarrow)}$$

9. példa:

A három különböző anyagú szakaszból álló rúd erő- és hézagmentesen illeszkedik a támaszok közé. Mekkora lesz a reakcióerő, ha a középső szakasz hőmérsékletét 100 °C -kal megnöveljük, miközben a másik két szakasz hőmérséklete változatlan marad? Mekkora és milyen irányú lesz a szakaszhatárok elmozdulása?



$\ell_1 = 0{,}8\ m$ $\quad E_1 = 0{,}7 \cdot 10^{11}\ Pa$

$\ell_2 = 0{,}8\ m$ $\quad E_2 = 1{,}4 \cdot 10^{11}\ Pa$

$\ell_3 = 1\ m$ $\quad E_3 = 2{,}2 \cdot 10^{11}\ Pa$

$\Delta t_1 = 0$ $\quad \alpha_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{°C}$

$\Delta t_2 = {}^{+}100\ °C$ $\quad A = 0{,}01\ m^2$

$\Delta t_3 = 0$ $\quad F = ?$

$\Delta x_1 = ?$

$\Delta x_2 = ?$

$N = {}^{-}F$

$$\lambda_1 + (\lambda_{2t} + \lambda_2) + \lambda_3 = 0$$

$$\frac{-F\ell_1}{AE_1} + \left(\alpha_2 \ell_2 \Delta t_2 + \frac{(-F)\ell_2}{AE_2}\right) + \frac{(-F)\ell_3}{AE_3} = 0$$

$$\boxed{F = \frac{A\alpha_2 \ell_2 \Delta t_2}{\frac{\ell_1}{E_1} + \frac{\ell_2}{E_2} + \frac{\ell_3}{E_3}} = \frac{0{,}01 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-5} \cdot 800 \cdot 100}{\frac{800}{0{,}7 \cdot 10^5} + \frac{800}{1{,}4 \cdot 10^5} + \frac{1000}{2{,}2 \cdot 10^5}} = 590\ 180\ N = 590{,}2\ kN}$$

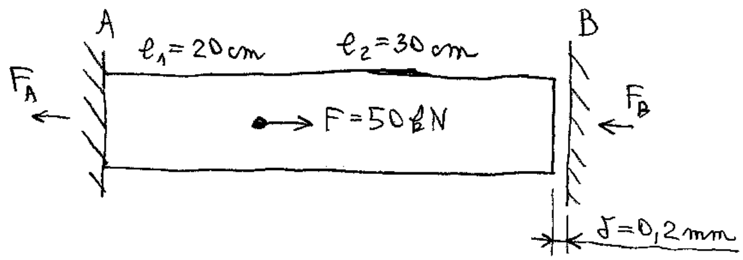
$$\boxed{\Delta x_1 = \lambda_1 = \frac{-F\ell_1}{AE_1} = \frac{-590{,}2 \cdot 10^3 \cdot 800}{0{,}01 \cdot 10^6 \cdot 0{,}7 \cdot 10^5} = -0{,}6745\ mm\ (\leftarrow)}$$

$$\boxed{\Delta x_2 = -\lambda_3 = -\frac{(-F)\ell_3}{AE_3} = \frac{590{,}2 \cdot 10^3 \cdot 1000}{0{,}01 \cdot 10^6 \cdot 2{,}2 \cdot 10^5} = 0{,}2683\ mm\ (\rightarrow)}$$

Megjegyzés:
Termikus nyúlása most csak a középső szakasznak volt.

10. példa: Mi a hézag?

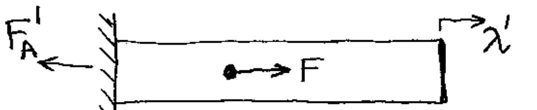
A rúd terheletlen állapotában a B támasznál hézag van. Az F erő működtetésekor összezáródik a hézag? Számítsuk ki a reakcióerőket!



$A = 1\,cm^2$

$E = 210\,GPa$

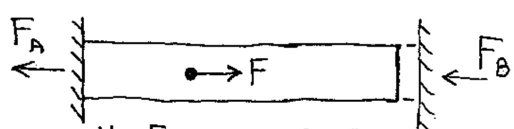
Először kiszámítjuk a teljes hosszváltozást arra az esetre, ha nem lenne B támasz.



$N_1' = +F \qquad N_2' = 0$

$$\lambda' = \lambda_1' = \frac{F\ell_1}{AE} = \frac{50\cdot 10^3 \cdot 200}{100\cdot 210\cdot 10^3} = 0{,}4762\,mm > \delta$$

Nagyobbra adódott, mint a hézag, vagyis a jobb oldali vég fel fog támaszkodni. Innentől megoldjuk a feladatot úgy, hogy a jobb oldali vég nekinyomódik a B támasznak, vagyis F_A és F_B reakcióerő is ébred. A hézagmentes feladatokhoz képest annyi az újdonság, hogy a teljes megnyúlás nem nullával, hanem a hézag értékével egyenlő.



$N_1 = F_A \qquad N_2 = F_A - F$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \delta$$

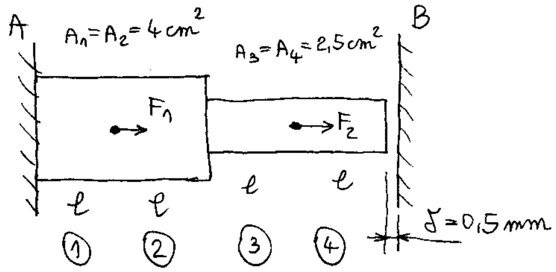
$$\frac{F_A \ell_1}{AE} + \frac{(F_A - F)\ell_2}{AE} = \delta$$

$$\boxed{F_A = \frac{AE\delta + F\ell_2}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{100\cdot 210\cdot 10^3\cdot 0{,}2 + 50\cdot 10^3\cdot 300}{200+300} = 38\,400\,N = 38{,}4\,kN\ (\leftarrow)}$$

$$\sum F_x = 0 = -F_A + F - F_B \longrightarrow \boxed{F_B = F - F_A = 50 - 38{,}4 = 11{,}6\,kN\ (\leftarrow)}$$

11. példa: Hézag, több erő, változó keresztmetszet. Szupergenyó feladat.

A rúd terheletlen állapotában a B támasznál hézag van. Az erők működtetésekor összezáródik a hézag? Számítsuk ki a reakcióerőket! Rajzoljuk meg a normálerő és a normálfeszültség ábrát!



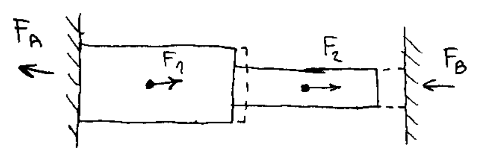
$\ell=150\,mm$
$E=210\,GPa$
$F_1=300\,kN$
$F_2=100\,kN$
$F_A=?$ $F_B=?$
$N_i=?$ $\sigma_i=?$

$N_1'=F_1+F_2$ $N_2'=N_3'=F_2$ $N_4'=0$

$$\lambda_1'+\lambda_2'+\lambda_3'+\lambda_4'=\frac{(F_1+F_2)\ell}{A_1E}+\frac{F_2\ell}{A_1E}+\frac{F_2\ell}{A_3E}+0=$$

$$=\frac{\ell}{E}\left(\frac{F_1+2F_2}{A_1}+\frac{F_2}{A_3}\right)=\frac{150}{210\cdot10^3}\left(\frac{300\cdot10^3+2\cdot100\cdot10^3}{4\cdot10^2}+\frac{100\cdot10^3}{2{,}5\cdot10^2}\right)=\underline{1{,}179\,mm>\delta}$$

Felírtuk a teljes hosszváltozást arra az esetre, ha nem lenne B támasz. Ez nagyobbra adódott, mint a hézag, vagyis a jobb oldali vég fel fog támaszkodni. Innentől megoldjuk a feladatot úgy, hogy a jobb oldali vég nekinyomódik a B támasznak, vagyis F_A és F_B reakcióerő is ébred. A teljes megnyúlás a hézag értékével egyenlő.



$N_1=F_A$ $N_2=N_3=F_A-F_1$ $N_4=F_A-F_1-F_2$

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=\delta$$

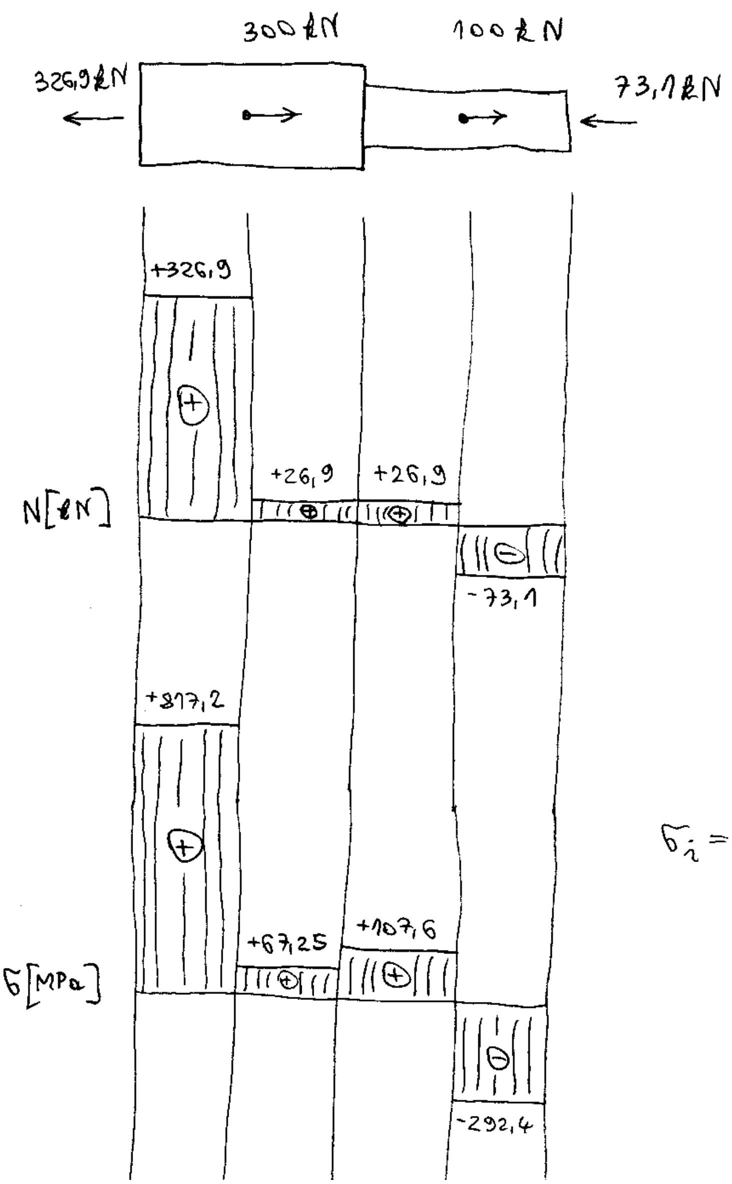
$$\frac{F_A\ell}{A_1E}+\frac{(F_A-F_1)\ell}{A_1E}+\frac{(F_A-F_1)\ell}{A_3E}+\frac{(F_A-F_1-F_2)\ell}{A_3E}=\delta$$

$$\frac{F_A}{A_1}+\frac{F_A}{A_1}+\frac{F_A}{A_3}+\frac{F_A}{A_3}=\frac{E}{\ell}\delta+\frac{F_1}{A_1}+\frac{F_1}{A_3}+\frac{F_1+F_2}{A_3}$$

$$\boxed{F_A}=\frac{\frac{E}{\ell}\delta+\frac{F_1}{A_1}+\frac{2F_1+F_2}{A_3}}{2\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_3}\right)}=\frac{\frac{210\cdot10^3}{150}\cdot0{,}5+\frac{300\cdot10^3}{4\cdot10^2}+\frac{2\cdot300\cdot10^3+100\cdot10^3}{2{,}5\cdot10^2}}{2\left(\frac{1}{4\cdot10^2}+\frac{1}{2{,}5\cdot10^2}\right)}=326\,923\,N=\boxed{326{,}9\,kN\,(\leftarrow)}$$

$$\sum F_x=0=-F_A+F_1+F_2-F_B$$

$$\boxed{F_B}=F_1+F_2-F_A=300+100-326{,}9=\boxed{73{,}1\,kN\,(\leftarrow)}$$

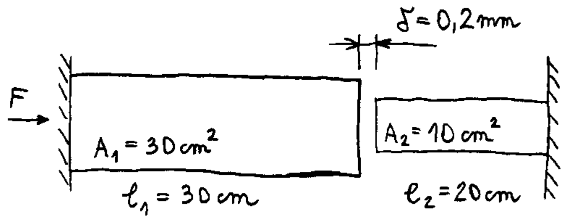


$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i}$$

Megjegyzés:
Figyeljük meg, hogy a keresztmetszet-változás a normálerőt nem befolyásolja, de a feszültséget igen.

12. példa: Hőtágulásos feladat hézaggal.

A befogott, azonos anyagú rudak között szobahőmérsékleten $\delta = 0{,}2$ mm hézag van. Összezáródik a hézag, ha mindkét rúd hőmérsékletét $\Delta t = 70\ °C$-kal megnöveljük? Mekkora lesz a támaszokban ébredő reakcióerő? Mekkora lesz az 1-es szakasz hossza a melegítés után? Mekkora feszültség ébred a 2-es szakaszban?



$E_1 = E_2 = E = 210\,\mathrm{GPa}$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 12\cdot 10^{-6}\ \frac{1}{°C}$

$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t = +70\,°C$

$F = ?\quad \ell_1' = ?\quad \sigma_2 = ?$

$$\lambda' = \lambda_{t_1} + \lambda_{t_2} = \alpha \ell_1 \Delta t + \alpha \ell_2 \Delta t = \alpha(\ell_1+\ell_2)\Delta t =$$
$$= 12\cdot 10^{-6}(300+200)\cdot 70 = 0{,}42\ \mathrm{mm} > \delta \longrightarrow \text{összeér} \longrightarrow F > 0$$

$$(\lambda_{t_1} + \lambda_1) + (\lambda_{t_2} + \lambda_2) = \delta$$

$$\alpha \ell_1 \Delta t + \frac{(-F)\ell_1}{A_1 E} + \alpha \ell_2 \Delta t + \frac{(-F)\ell_2}{A_2 E} = \delta$$

$$\boxed{F = \frac{\alpha(\ell_1+\ell_2)\Delta t - \delta}{\frac{\ell_1}{A_1} + \frac{\ell_2}{A_2}} E = \frac{12\cdot 10^{-6}(300+200)\cdot 70 - 0{,}2}{\frac{300}{30\cdot 10^2} + \frac{200}{10\cdot 10^2}} \cdot 210\cdot 10^3 = 154000\,\mathrm{N} = 154\,\mathrm{kN}}$$

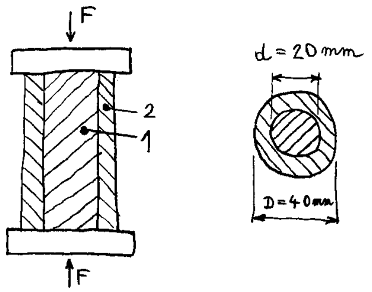
$$\boxed{\ell_1' = \ell_1 + (\lambda_{t_1} + \lambda_1) = \ell_1 + \alpha \ell_1 \Delta t + \frac{(-F)\ell_1}{A_1 E} = \ell_1\left(1 + \alpha\Delta t - \frac{F}{A_1 E}\right) =}$$
$$= 300\left(1 + 12\cdot 10^{-6}\cdot 70 - \frac{154\cdot 10^3}{30\cdot 10^2\cdot 210\cdot 10^3}\right) = \boxed{300{,}1787\ \mathrm{mm}}$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-F}{A_2} = \frac{-154\cdot 10^3}{10\cdot 10^2} = -154\ \mathrm{MPa}}$$

Megjegyzés:
A reakcióerő kiszámításához felírt egyenlet azt fejezi ki, hogy a termikus és mechanikai nyúlások összege egyenlő a rendelkezésre álló hézaggal. A további nyúlást a támaszok megakadályozzák.
Az 1-es szakasz melegítés utáni hossza az eredeti hossz és a hosszváltozás összege.

13. példa: A 2. gyakorlat 1. példájához hasonló feladat.

Az 1-es acélrudat és a ráhúzott 2-es rézcsövet a végtelen merevnek tekinthető nyomólapokon keresztül az F erő terheli. Mekkora lesz az alkatrészekben ébredő erő és feszültség?

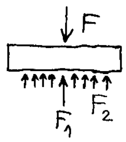


$E_1 = 210$ GPa
$E_2 = 90$ GPa
$F = 100$ kN
$N_1 = ?$ $N_2 = ?$
$\sigma_1 = ?$ $\sigma_2 = ?$

$$A_1 = \frac{d^2\pi}{4} = \frac{20^2\pi}{4} = 314{,}2\ mm^2 \qquad A_2 = \frac{(D^2-d^2)\pi}{4} = \frac{(40^2-20^2)\pi}{4} = 942{,}5\ mm^2$$

1.) $\lambda_1 = \lambda_2$ ← A nyúlások egyenlők.

$$\frac{F_1 \ell}{A_1 E_1} = \frac{F_2 \ell}{A_2 E_2}$$



2.) $\sum F_y = 0 = F_1 + \quad - F$

2.) $F_2 = F - F_1$

2→1.) $\dfrac{F_1}{A_1E_1} = \dfrac{F - F_1}{A_2E_2}$

$$F_1 = \frac{\frac{F}{A_2E_2}}{\frac{1}{A_1E_1} + \frac{1}{A_2E_2}} = \frac{F}{\frac{A_2}{A_1}\frac{E_2}{E_1} + 1} = \frac{100}{\frac{942{,}5}{314{,}2}\frac{90}{210} + 1} = \underline{43{,}75\ kN}$$

2.) $\underline{F_2} = F - F_1 = 100 - 43{,}75 = \underline{56{,}25\ kN}$

$$\boxed{N_1 = -F_1 = -43{,}75\ kN}$$

$$\boxed{N_2 = -F_2 = -56{,}25\ kN}$$

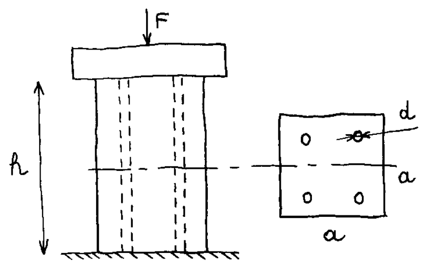
$$\boxed{\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-43{,}75 \cdot 10^3}{314{,}2} = -139{,}2\ MPa}$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-56{,}25 \cdot 10^3}{942{,}5} = -59{,}68\ MPa}$$

Megjegyzés:
Az első egyenlet azt fejezi ki, hogy a két szerkezeti elem megnyúlása egyenlő.
A második egyenlet a nyomólap függőleges egyensúlyát írja le.
Az alkatrészek által a nyomólapra kifejtett F_1 és F_2 erő irányát úgy vettük fel, hogy teljesüljön az egyensúly. Azt, hogy az alkatrészekben nyomóerő ébred, az N_1 és N_2 előjelével fejeztük ki.
Ha nem akarunk előjelezést, mert úgyis látjuk, hogy összenyomódás lesz, akkor a 16. példában alkalmazott (h) és (ny) jelölést is használhatjuk az eredményeknél.

14. példa: A 2. gyakorlat 1. példájához hasonló feladat.

A vasbeton oszlop 4 db vasat tartalmaz. Számítsuk ki a betonban és a vasban ébredő feszültséget! Mekkora lesz az oszlop összenyomódása?



$h = 50\ cm$
$a = 9\ cm$
$d = 1\ cm$
$E_v = 2 \cdot 10^5\ MPa$
$E_b = \dfrac{E_v}{15}$
$F = 10^5\ N$

$\sigma_b = ?$
$\sigma_v = ?$
$\lambda = ?$

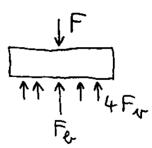
$$A_v = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{10^2 \pi}{4} = 78{,}54\ mm^2$$

$$A_b = a^2 - 4A_v = 90^2 - 4 \cdot 78{,}54 = 7786\ mm^2$$

1.) $\lambda_b = \lambda_v$

$$\frac{F_b h}{A_b E_b} = \frac{F_v h}{A_v E_v}$$

2.) $\sum F_y = 0 = F_b + 4F_v - F$



2.) $F_b = F - 4F_v$

2→1.)
$$\frac{(F - 4F_v)h}{A_b E_b} = \frac{F_v h}{A_v E_v}$$

$$\frac{F}{A_b E_b} = \frac{4F_v}{A_b E_b} + \frac{F_v}{A_v E_v}$$

$$\underline{F_v} = \frac{\frac{F}{A_b E_b}}{\frac{4}{A_b E_b} + \frac{1}{A_v E_v}} = \frac{F}{4 + \frac{A_b E_b}{A_v E_v}} = \frac{10^5}{4 + \frac{7786}{78{,}54}\frac{1}{15}} = \underline{9426\ N}$$

2.) $\underline{F_b} = 10^5 - 4 \cdot 9426 = \underline{62\,296\ N}$

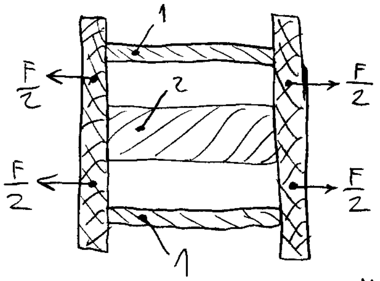
$$\boxed{\sigma_b = \frac{N_b}{A_b} = \frac{-F_b}{A_b} = \frac{-62\,296}{7786} = -8\ MPa} \quad \boxed{\sigma_v = \frac{N_v}{A_v} = \frac{-F_v}{A_v} = \frac{-9426}{78{,}54} = -120\ MPa}$$

$$\boxed{\lambda = \lambda_v = \frac{N_v h}{A_v E_v} = \frac{-F_v h}{A_v E_v} = \frac{-9426 \cdot 500}{78{,}54 \cdot 2 \cdot 10^5} = -0{,}3\ mm}$$

Megjegyzés:
Az első egyenlet azt fejezi ki, hogy a két szerkezeti elem megnyúlása egyenlő.
A második egyenlet a nyomólap függőleges egyensúlyát írja le.
Az alkatrészek által a nyomólapra kifejtett F_b és F_v erő irányát úgy vettük fel, hogy teljesüljön az egyensúly. Azt, hogy az alkatrészekben nyomóerő ébred, az N_b és N_v előjelével fejeztük ki.
Ha nem akarunk előjelezést, mert úgyis látjuk, hogy összenyomódás lesz, akkor a 16. példában alkalmazott (h) és (ny) jelölést is használhatjuk az eredményeknél.

15. példa: A 2. gyakorlat 1. példájához hasonló feladat.

A végtelen merevnek tekinthető lapokat az 1-es könnyűfém és a 2-es acélrúd fogja össze. A szerkezetet a szimmetrikus eloszlású F erő terheli. Mekkora lesz az alkatrészekben ébredő normálerő és normálfeszültség?



$d_1 = 15\ mm$ $\qquad N_1 = ?$

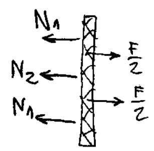
$E_1 = 210\ GPa$ $\qquad N_2 = ?$

$d_2 = 25\ mm$ $\qquad \sigma_1 = ?$

$E_2 = 100\ GPa$ $\qquad \sigma_2 = ?$

$F = 40\ kN$

1.) $\sum F_x = 0 = F - 2N_1 - N_2$



2.) $\lambda_1 = \lambda_2$

$$\frac{N_1 l}{A_1 E_1} = \frac{N_2 l}{A_2 E_2}$$

1.) $N_2 = F - 2N_1$

1→2.)
$$\frac{N_1 l}{A_1 E_1} = \frac{(F - 2N_1) l}{A_2 E_2}$$

$$\boxed{N_1} = \frac{\frac{F l}{A_2 E_2}}{\frac{l}{A_1 E_1} + \frac{2l}{A_2 E_2}} = \frac{F}{\frac{A_2 E_2}{A_1 E_1} + 2} = \frac{40}{\frac{490{,}9 \cdot 100}{176{,}7 \cdot 210} + 2} = \boxed{12{,}04\ kN}$$

$$A_1 = \frac{d_1^2 \pi}{4} = \frac{15^2 \pi}{4} = 176{,}7\ mm^2 \qquad A_2 = \frac{d_2^2 \pi}{4} = \frac{25^2 \pi}{4} = 490{,}9\ mm^2$$

1.) $\boxed{N_2} = F - 2N_1 = 40 - 2 \cdot 12{,}04 = \boxed{15{,}92\ kN}$

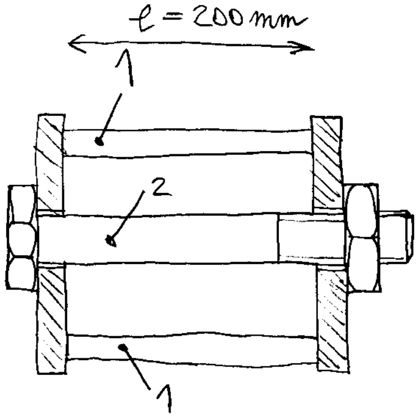
$$\boxed{\sigma_1} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{12{,}04 \cdot 10^3}{176{,}7} = \boxed{68{,}14\ MPa}$$

$$\boxed{\sigma_2} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{15{,}92 \cdot 10^3}{490{,}9} = \boxed{32{,}43\ MPa}$$

Megjegyzés:
Az első egyenlet a jobb oldali lap egyensúlyát írja le.
A második egyenlet azt fejezi ki, hogy az alkatrészek nyúlása azonos.
Most nem különböztettük meg a lapra ható erőket és az alkatrészekben ébredő normálerőt. Ezt azért tehettük meg, mert láttuk, hogy az alkatrészekben húzóerő ébred majd, tehát pozitív lesz az előjel.

16. példa: Egy feladat csak erős idegzetűeknek.

A vázolt szerkezet kezdetben erőmentes, az anyát éppen felütköztettük a végtelen merevnek tekinthető nyomólapon. Ezután további egy fordulattal előfeszítjük a szerkezetet. Mekkora erő és mekkora feszültség ébred az 1-es rudakban és 2-es orsóban? Mekkora lesz az 1-es rudak hosszváltozása?



$d_1 = 10\ mm$

$d_2 = 16\ mm$

$h = 0{,}5\ mm$ (menetemelkedés)

$E_1 = E_2 = E = 210\,GPa$

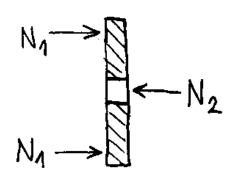
$N_1 = ?\ N_2 = ?$

$\sigma_1 = ?\ \sigma_2 = ?$

$\Delta l = ?$

$$A_1 = \frac{d_1^2 \pi}{4} = \frac{10^2 \pi}{4} = 78{,}54\ mm^2 \qquad A_2 = \frac{d_2^2 \pi}{4} = \frac{16^2 \pi}{4} = 201{,}1\ mm^2$$

1.) $\lambda_2 + \lambda_1 = h \rightarrow \frac{N_2 l}{A_2 E} + \frac{N_1 l}{A_1 E} = h$



2.) $\sum F_x = 0 \rightarrow 2N_1 = N_2$

2→1.) $\frac{2N_1}{A_2} + \frac{N_1}{A_1} = h\frac{E}{l}$

$$\boxed{N_1 = \frac{hE}{l\left(\frac{2}{A_2} + \frac{1}{A_1}\right)} = \frac{0{,}5 \cdot 210 \cdot 10^3}{200\left(\frac{2}{201{,}1} + \frac{1}{78{,}54}\right)} = 23\,151\ N\ (ny)}$$

2.) $\boxed{N_2 = 2N_1 = 2 \cdot 23\,151 = 46\,302\ N\ (h)}$

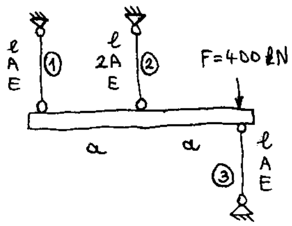
$$\boxed{\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{23\,151}{78{,}54} = 294{,}8\ MPa\ (ny)} \quad \boxed{\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{46302}{201{,}1} = 230{,}2\ MPa\ (h)}$$

$$\boxed{\Delta l = \lambda_1 = \frac{N_1 l}{A_1 E} = \sigma_1 \frac{l}{E} = 294{,}8\frac{200}{210 \cdot 10^3} = 0{,}2808\ mm\ (ny)}$$

Megjegyzés:
Az első egyenlet azt fejezi ki, hogy a rudak összenyomódása és az orsó megnyúlása együtt előteremti az egy menetemelkedésnyi elmozdulást. Nem használtunk előjeles erőket és nyúlásokat, mert látjuk, hogy az orsó megnyúlik, a rudak pedig összenyomódnak.
A második egyenlet a jobb oldali nyomólap egyensúlyát írja le.
Az eredményeknél a húzást (h), a nyomást pedig (ny) betűvel jeleztük. Ilyen jelölést alkalmazva a 13. és 14. példához hasonló feladatokban is elhagyhatjuk az előjeleket.

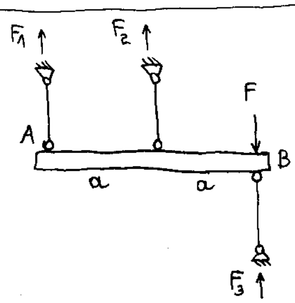
17. példa: A 2. gyakorlat 2. példájához hasonló feladat.

A vízszintes, végtelen merev gerendát három, azonos anyagú, de eltérő keresztmetszetű rúd tarja. Számítsuk ki a rudak hosszváltozását (érték és h/ny)! Mekkora lesz a rudakban tárolt rugalmas alakváltozási energia?



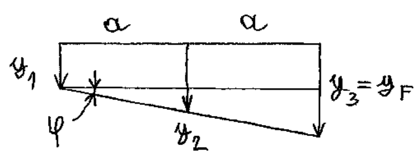
$\ell = 1{,}2\,m$
$a = 1{,}5\,m$
$A = 20\,cm^2$
$E = 200\,GPa$

$\lambda_i = ?$
$W = ?$



1.) $\sum M_A = 0 = F_2 \cdot a + F_3 \cdot 2a - F \cdot 2a$

2.) $\sum M_B = 0 = -F_1 \cdot 2a - F_2 \cdot a$



$$y_1 = \frac{F_1 \ell}{A E}$$

3.) $F_1 = \frac{AE}{\ell} y_1$

$$y_2 = y_1 + \varphi a = \frac{F_2 \ell}{2AE}$$

4.) $F_2 = \frac{2AE}{\ell}\left(y_1 + \varphi a\right)$

$$y_3 = y_1 + 2\varphi a = \frac{F_3 \ell}{AE}$$

5.) $F_3 = \frac{AE}{\ell}\left(y_1 + 2\varphi a\right)$

1.) $F_2 + 2F_3 = 2F$

$4,5 \rightarrow 1.)$

$$\frac{2AE}{\ell}(y_1 + \varphi a) + 2\frac{AE}{\ell}(y_1 + 2\varphi a) = 2F$$

1.) $2y_1 + 3\varphi a = \frac{F\ell}{AE}$

2.) $0 = 2F_1 + F_2$

$3,4 \rightarrow 2.)$

$$0 = 2\frac{AE}{\ell}y_1 + \frac{2AE}{\ell}(y_1 + \varphi a)$$

2.) $0 = 2y_1 + \varphi a$

$\varphi a = -2y_1$

$2 \rightarrow 1.)$

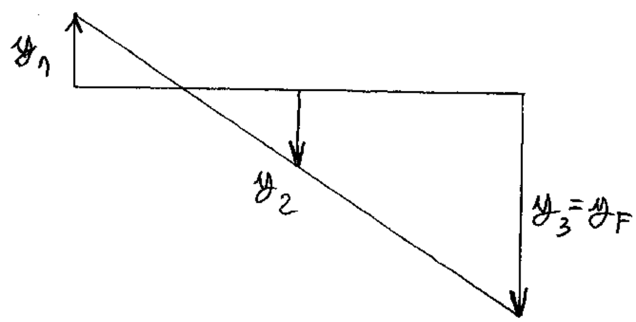
$$2y_1 + 3(-2y_1) = \frac{F\ell}{AE}$$

$$\underline{y_1} = \frac{-1}{4}\frac{F\ell}{AE} = \frac{-1}{4}\frac{400\cdot 10^3 \cdot 1200}{2000\cdot 200\cdot 10^3} = \underline{-0,3\ mm\ (\uparrow)}$$

2.) $\underline{\varphi a} = -2y_1 = -2\cdot(-0,3) = \underline{+0,6\ mm}$

$$y_2 = y_1 + \varphi a = {}^-0{,}3 + 0{,}6 = {}^+0{,}3\,mm\ (\downarrow)$$

$$y_3 = y_1 + 2\varphi a = {}^-0{,}3 + 2 \cdot 0{,}6 = {}^+0{,}9\,mm\ (\downarrow)$$



$$\boxed{\lambda_1 = y_1 = {}^-0{,}3\,mm\ (ny)}$$

$$\boxed{\lambda_2 = y_2 = {}^+0{,}3\,mm\ (h)}$$

$$\boxed{\lambda_3 = -y_3 = {}^-0{,}9\,mm\ (ny)}$$

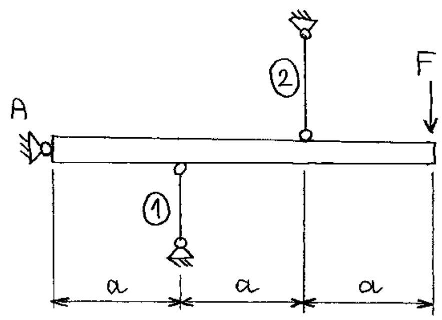
$$\boxed{W = \sum W_i = W_F = \frac{1}{2} F y_F} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 10^3 \cdot 0{,}9 \cdot 10^{-3} = \boxed{180\ J}$$

Megjegyzés:
Kihasználtuk az energiamegmaradás törvényét. A rudakban tárolt rugalmas energia egyenlő az F erő által végzett munkával. Utóbbit könnyebb kiszámolni, mert a támadáspont elmozdulását is megkérdezték.
Gyakorlásnak kiszámíthatjuk a rudakban tárolt energia összegét is. Ehhez először ki kell számítani, vagy csak ki kell fejezni a rúderőket a nyúlásokkal.

18. példa: A 2. gyakorlat 2. példájához hasonló, de egyszerűbb feladat.

A vízszintes, végtelen merev gerendát az A csuklós támasz és a két rúd tartja. Határozzuk meg az F erő hatására a rudakban ébredő normálfeszültséget, és az A támaszban ébredő reakcióerőt! Mekkora lesz az F erő támadáspontjának elmozdulása, és a rudakban tárolt rugalmas energia?



$\ell_1 = 2\,m$ $\quad$ $\ell_2 = 3\,m$

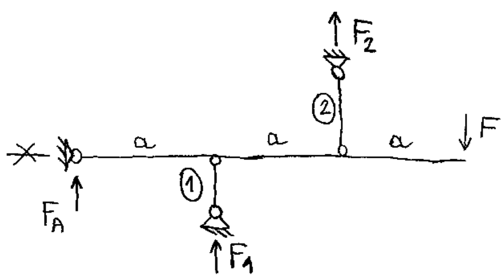
$E_1 = 2\cdot 10^{11}\,Pa$ $\quad$ $E_2 = 1{,}2\cdot 10^{11}\,Pa$

$A_1 = 10^{-4}\,m^2$ $\quad$ $A_2 = 4\cdot 10^{-4}\,m^2$

$F = 10000\,N$ $\quad$ $\sigma_1 = ?$ $\quad$ $y_F = ?$

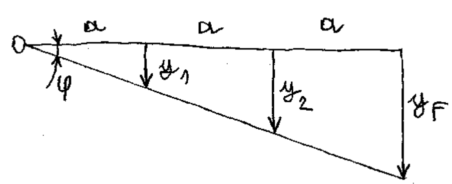
$a = 3\,m$ $\quad$ $\sigma_2 = ?$ $\quad$ $W = ?$

$F_A = ?$



1.) $\sum F_y = 0 = F_A + F_1 + F_2 - F$

2.) $\sum M_A = 0 = F_1\cdot a + F_2\cdot 2a - F\cdot 3a$



$$y_1 = \varphi\cdot a = \frac{F_1 \ell_1}{A_1 E_1}$$

3.) $$F_1 = \frac{A_1 E_1}{\ell_1}\varphi a$$

$$y_2 = \varphi\cdot 2a = \frac{F_2 \ell_2}{A_2 E_2}$$

4.) $$F_2 = \frac{A_2 E_2}{\ell_2}\cdot 2\varphi a$$

$3,4 \rightarrow 2.)$

$$0 = \frac{A_1 E_1}{\ell_1} \varphi a^2 + \frac{A_2 E_2}{\ell_2} \cdot 4\varphi a^2 - 3Fa$$

$$\varphi = \frac{3F}{a} \frac{1}{\frac{A_1 E_1}{\ell_1} + 4\frac{A_2 E_2}{\ell_2}} = \frac{3 \cdot 10000}{3000} \frac{1}{\frac{10^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{2000} + 4\frac{4 \cdot 10^2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^5}{3000}} =$$

$$= 1{,}351 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$3.)$ $$F_1 = \frac{A_1 E_1}{\ell_1} \varphi a = \frac{10^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{2000} \cdot 1{,}351 \cdot 10^{-4} \cdot 3000 = 4053 \text{ N}$$

$4.)$ $$F_2 = \frac{A_2 E_2}{\ell_2} \cdot 2\varphi a = \frac{4 \cdot 10^2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^5}{3000} \cdot 2 \cdot 1{,}351 \cdot 10^{-4} \cdot 3000 = 12970 \text{ N}$$

$1.)$ $$\boxed{F_A = F - F_1 - F_2 = 10000 - 4053 - 12970 = -7023 \text{ N} (\downarrow)}$$

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-F_1}{A_1} = \frac{-4053}{10^2} = -40{,}53 \text{ MPa}}$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{F_2}{A_2} = \frac{+12970}{4 \cdot 10^2} = +32{,}43 \text{ MPa}}$$

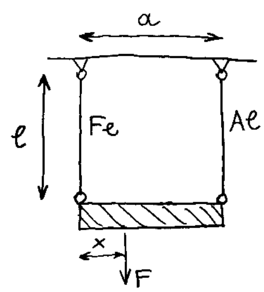
$$\boxed{y_F = \varphi \cdot 3a = 1{,}351 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 10^3 = 1{,}216 \text{ mm} (\downarrow)}$$

$$\boxed{W = W_1 + W_2 = W_F = \frac{1}{2} F \cdot y_F = \frac{1}{2} \cdot 10000 \cdot 1{,}216 \cdot 10^{-3} = 6{,}08 \text{ J}}$$

Megjegyzés:
Kihasználtuk az energiamegmaradás törvényét. A rudakban tárolt rugalmas energia egyenlő az F erő által végzett munkával. Utóbbit könnyebb kiszámolni, mert a támadáspont elmozdulását is megkérdezték.

19. példa:

A végtelen merevnek tekinthető gerendát egy vas (Fe) és egy alumínium (Al) rúd tartja. A rudak terheletlen hossza azonos. Hol kell működtetni az F erőt, hogy a gerenda terhelt állapotban is vízszintes maradjon?



$a = 40\ cm$

$l = 50\ cm$

$A_{Al} = 2\ cm^2$

$E_{Al} = 0{,}7 \cdot 10^5\ \frac{N}{mm^2}$

$A_{Fe} = 2\ cm^2$

$E_{Fe} = 2{,}1 \cdot 10^5\ \frac{N}{mm^2}$

$x = ? \leftarrow \lambda_{Al} = \lambda_{Fe}$

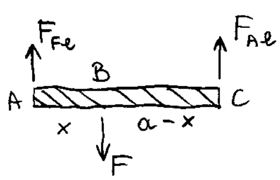
A szükséges erőeloszlás kiszámítása:

$$\lambda_{Al} = \lambda_{Fe}$$

$$\frac{F_{Al}\, l}{A_{Al} E_{Al}} = \frac{F_{Fe}\, l}{A_{Fe} E_{Fe}}$$

$$\frac{F_{Fe}}{F_{Al}} = \frac{A_{Fe} E_{Fe}}{A_{Al} E_{Al}} = \frac{2 \cdot 2{,}1}{2 \cdot 0{,}7} = 3$$

A támadáspont helyének meghatározása:



$$\sum M_B = 0 = -F_{Fe} \cdot x + F_{Al}(a - x)$$

$$\frac{F_{Fe}}{F_{Al}} = \frac{a - x}{x} = 3$$

$$a - x = 3x$$

$$\boxed{x = \frac{a}{4} = \frac{40}{4} = 10\ cm}$$

Megjegyzés:
Első lépésben kiszámítjuk, hogy milyen arányban kell megoszlania a terhelésnek ahhoz, hogy a rudak megnyúlása azonos legyen. Ezután meghatározzuk, hogy hol kell működtetni az F erőt, hogy ilyen teherelosztás jöjjön létre.