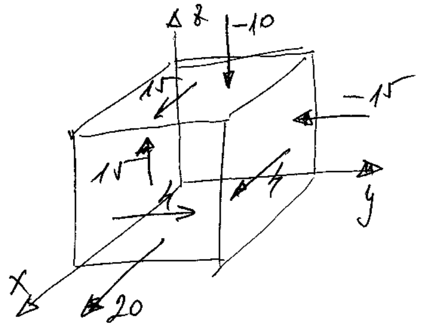
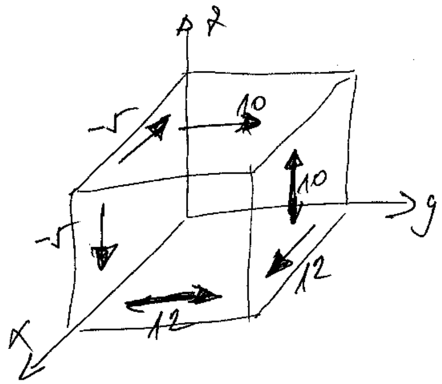
1. példa:

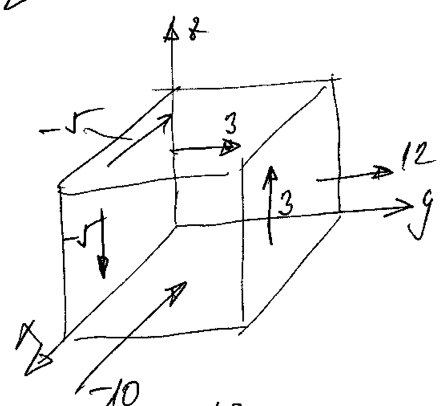
Írjuk fel az adott kockához tartozó feszültségtenzort!



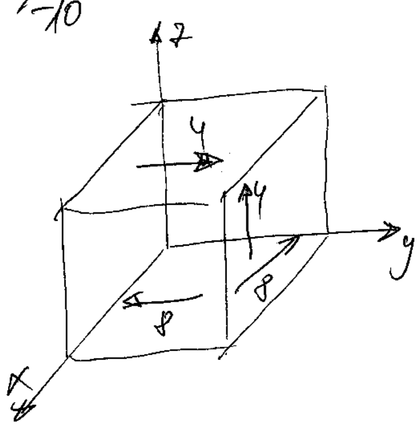
$$\underline{\underline{\phi}} = \begin{bmatrix} 20 & 4 & 15 \\ 4 & -15 & 0 \\ 15 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$



$$\underline{\underline{\phi}} = \begin{bmatrix} 0 & 12 & -5 \\ 12 & 0 & 10 \\ -5 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\underline{\underline{\phi}} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -5 \\ 0 & 12 & 3 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

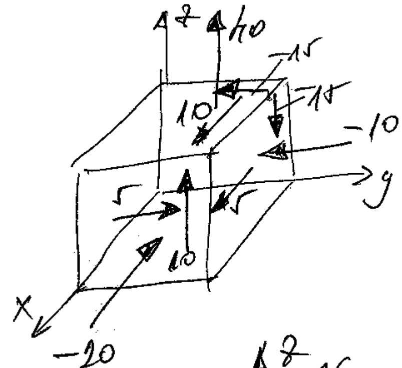


$$\underline{\underline{\phi}} = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 0 \\ -8 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

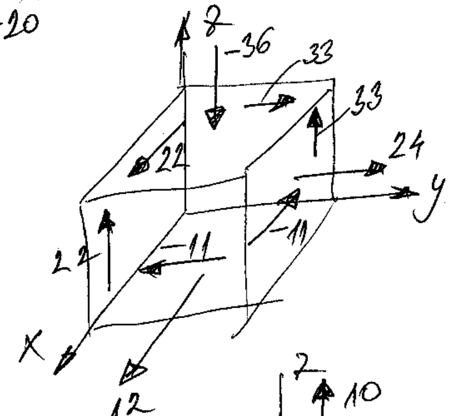
2. példa:

Rajzoljuk fel az adott feszültségtenzorhoz tartozó kockát!

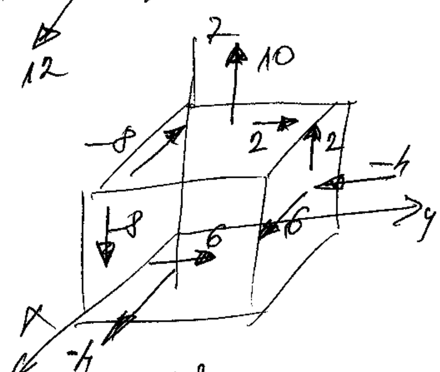
$$\underline{\phi} = \begin{bmatrix} -20 & 5 & 10 \\ 5 & -10 & -15 \\ 10 & -15 & 40 \end{bmatrix}$$



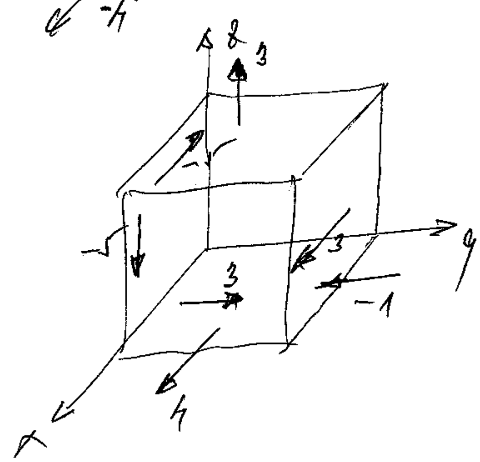
$$\underline{\phi} = \begin{bmatrix} 12 & -11 & 22 \\ -11 & 24 & 33 \\ 22 & 33 & -36 \end{bmatrix}$$



$$\phi = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -8 \\ 6 & -4 & 2 \\ -8 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$



$$\phi = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$



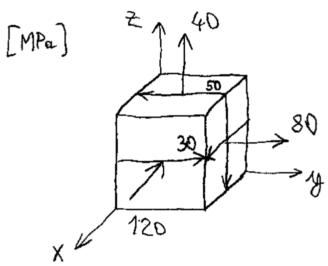
3. példa: Feszültségvektor számítása.

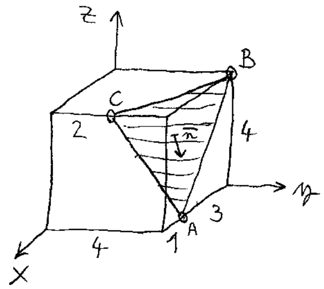
Egy alkatrész egy pontjának feszültségállapotát a kis kocka szemlélteti. Írjuk fel a feszültségtenzort! Számítsuk ki az ABC síkhoz tartozó feszültségvektort! Határozzuk meg az ABC síkhoz tartozó normálfeszültség értékét!

$\underline{\underline{\varnothing}} = ?$

$\bar{\rho}_{\bar{n}} = ?$

$\sigma_{\bar{n}} = ?$





$$\underline{\underline{\varnothing}} = \begin{bmatrix} -120 & 30 & 0 \\ 30 & 80 & -50 \\ 0 & -50 & 40 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$$\bar{n} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}$$

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \overline{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0+8 \\ -(-12-4) \\ 6-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{8^2+16^2+6^2} = \sqrt{356} = 18{,}87$$

$$\bar{n} = \frac{1}{18{,}87} \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4240 \\ 0{,}8479 \\ 0{,}3180 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\rho}_{\bar{n}} = \underline{\underline{\varnothing}}\, \bar{n} = \begin{bmatrix} -120 & 30 & 0 \\ 30 & 80 & -50 \\ 0 & -50 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}4240 \\ 0{,}8479 \\ 0{,}3180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25{,}44 \\ 64{,}65 \\ -29{,}68 \end{bmatrix} \text{MPa} \qquad |\bar{\rho}_{\bar{n}}| = 75{,}55 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\bar{n}} = \bar{n} \cdot \bar{\rho}_{\bar{n}} = \begin{bmatrix} 0{,}4240 & 0{,}8479 & 0{,}3180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -25{,}44 \\ 64{,}65 \\ -29{,}68 \end{bmatrix} = 34{,}59 \text{ MPa}$$

Megjegyzés:
Az ABC sík normál-egységvektorát vektori szorzással állítottuk elő.
A feszültségvektornak a felületre merőleges összetevőjét a normálvektorra való vetületképzéssel (skaláris szorzat) számítottuk ki.

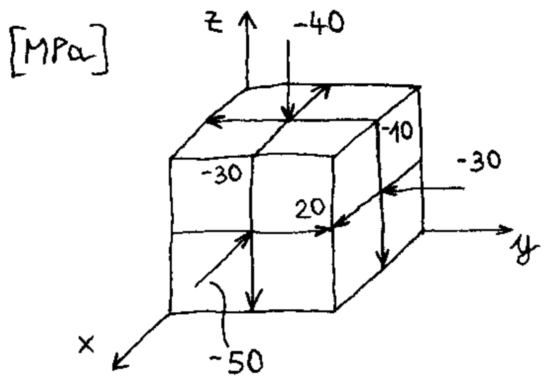
4. példa: Általános Hooke-törvény.

Rajzoljuk fel az adott feszültségtenzorhoz tartozó kockát! Számítsuk ki az alakváltozási tenzort!

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} -50 & 20 & -30 \\ 20 & -30 & -10 \\ -30 & -10 & -40 \end{bmatrix} \text{MPa} \qquad \nu = 0{,}25 \qquad G = 80\,\text{GPa}$$

Kocka?

$\underline{\underline{A}} = ?$



$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2G}\left(\underline{\underline{F}} - \frac{F_I}{m+1}\underline{\underline{E}}\right)$$

$$m = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{0{,}25} = 4$$

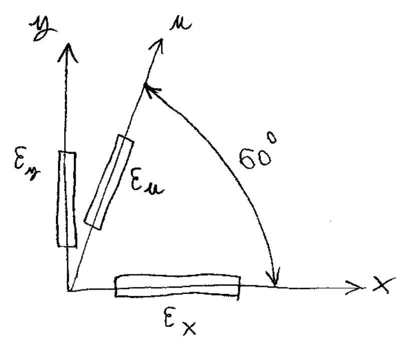
$$\boxed{\underline{\underline{A}}} = \frac{1}{2\cdot 80\cdot 10^3}\left(\begin{bmatrix} -50 & 20 & -30 \\ 20 & -30 & -10 \\ -30 & -10 & -40 \end{bmatrix} - \underbrace{\frac{-50-30-40}{4+1}}_{+24}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\boxed{= \begin{bmatrix} -1{,}625 & 1{,}250 & -1{,}875 \\ 1{,}250 & -0{,}375 & -0{,}625 \\ -1{,}875 & -0{,}625 & -1{,}000 \end{bmatrix}\cdot 10^{-4}}$$

Megjegyzés:
Régebbi példa, ezért **Φ** és **U** helyett **F** és **A** jelölés van.

5. példa: Nyúlásmérő bélyeges példa.

A test felületének egy terheletlen pontjában, a bejelölt irányokban mérjük a fajlagos nyúlást. Határozzuk meg – rugalmas alakváltozást feltételezve – az alakváltozási- és a feszültségtenzort az xyz koordinátarendszerben!



$\varepsilon_x = -2\cdot 10^{-4}$

$\varepsilon_y = 4\cdot 10^{-4}$

$\varepsilon_u = 1\cdot 10^{-4}$

$E = 200\ \mathrm{GPa},\ G = 80\ \mathrm{GPa}$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_u = \overline{n}_u^T\, \underline{\underline{U}}\, \overline{n}_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{4}\gamma_{xy} + \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_y \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\varepsilon_x + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} + \frac{3}{4}\varepsilon_y = \varepsilon_u$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_u - \frac{1}{2\sqrt{3}}\varepsilon_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_y = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot(-2) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4\right)\cdot 10^{-4} = -1{,}732\cdot 10^{-4}$$

$$\underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} -2 & -1{,}732 & 0 \\ -1{,}732 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}667 \end{bmatrix}\cdot 10^{-4}$$

$$G = \frac{E}{2\left(1+\frac{1}{m}\right)}$$

$$m = \frac{1}{\frac{E}{2G} - 1} = \frac{1}{\frac{200}{2\cdot 80} - 1} = 4$$

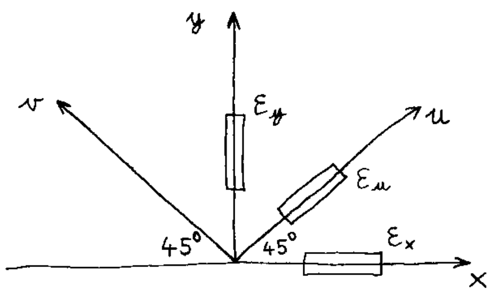
$$\sigma_z = 0 = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{m-2}\right) \rightarrow \varepsilon_z = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1-m} = \frac{-2+4}{1-4}\cdot 10^{-4} = -0{,}667\cdot 10^{-4}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2G\left(\underline{\underline{U}} + \frac{U_I}{m-2}\underline{\underline{E}}\right) = 2\cdot 80\cdot 10^3\cdot 10^{-4}\left(\begin{bmatrix} -2 & -1{,}732 & 0 \\ -1{,}732 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}667 \end{bmatrix} + \underbrace{\frac{-2+4-0{,}667}{4-2}}_{0{,}667}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -21{,}3 & -27{,}7 & 0 \\ -27{,}7 & 74{,}7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{MPa}$$

Megjegyzés:
Régebbi példa, ezért az irány-egységvektort $\mathbf{e}_u$ helyett $\mathbf{n}_u$ jelöli.

6. példa: Nyúlásmérő bélyeges példa.

A test felületének egy terheletlen pontjában, a bejelölt irányokban mérjük a fajlagos nyúlást. Határozzuk meg – rugalmas alakváltozást feltételezve – az alakváltozási tenzort! Számítsuk ki a v tengely irányú fajlagos nyúlást! Határozzuk meg a feszültségtenzort!



$$\varepsilon_x = +8\cdot 10^{-4}$$
$$\varepsilon_y = -6\cdot 10^{-4}$$
$$\varepsilon_u = -4\cdot 10^{-4}$$
$$E = 210 \text{ GPa}$$
$$m = 4$$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_u = \bar{n}_u^T \underline{\underline{A}}\, \bar{n}_u = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_x + \frac{\sqrt{2}}{4}\gamma_{xy} \\ \frac{\sqrt{2}}{4}\gamma_{xy} + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_u = \frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\varepsilon_y$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \varepsilon_u - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \left(-4 - \frac{8-6}{2}\right)\cdot 10^{-4} = -5\cdot 10^{-4}$$

$$\underline{\underline{F}} = 2G\left(\underline{\underline{A}} + \frac{A_I}{m-2}\right)$$

$$\sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{m-2}\right) = 0 \qquad /\cdot(m-2)$$

$$\varepsilon_z(m-2) + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{1-m} = \frac{8-6}{1-4}\cdot 10^{-4} = -0{,}6667\cdot 10^{-4}$$

$$\boxed{\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 8 & -5 & 0 \\ -5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}6667 \end{bmatrix}\cdot 10^{-4}}$$

$$\boxed{\varepsilon_v} = \bar{n}_v^T \underline{\underline{A}} \bar{n}_v = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -5 & 0 \\ -5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}6667 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8\frac{\sqrt{2}}{2} - 5\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 5\frac{\sqrt{2}}{2} - 6\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} =$$

$$\underline{\underline{F}} = 2G\left(\underline{\underline{A}} + \frac{A_I}{m-2}\underline{\underline{E}}\right)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2\left(1+\frac{1}{m}\right)} = \frac{210}{2\left(1+\frac{1}{4}\right)} = 84 \text{ GPa}$$

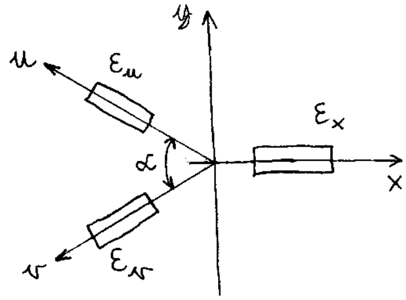
$$\underline{\underline{F}} = 2 \cdot 84 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4} \left(\begin{bmatrix} 8 & -5 & 0 \\ -5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}6667 \end{bmatrix} + \underbrace{\frac{8-6-0{,}6667}{4-2}}_{+0{,}6667} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 145{,}6 & -84 & 0 \\ -84 & -89{,}60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Megjegyzés:
Régebbi példa, ezért $\mathbf{\Phi}$ és $\mathbf{U}$ helyett $\mathbf{F}$ és $\mathbf{A}$, $\mathbf{e}_u$ és $\mathbf{e}_v$ helyett pedig $\mathbf{n}_u$ és $\mathbf{n}_v$ jelölés van.

7. példa: Nyúlásmérő bélyeges példa.

A test felületének egy terheletlen pontjában, a bejelölt irányokban mérjük a fajlagos nyúlást. Határozzuk meg – rugalmas alakváltozást feltételezve – az alakváltozási- és a feszültségtenzort az xyz koordinátarendszerben!



$\varepsilon_x = 550\cdot 10^{-6}$

$\varepsilon_u = 300\cdot 10^{-6}$

$\varepsilon_v = 610\cdot 10^{-6}$

$E = 210\ \text{GPa}$

$m = 3{,}2$

$\alpha = 60^\circ$

$\underline{\underline{A}} = ?$

$\underline{\underline{F}} = ?$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

1.) $$\varepsilon_u = \bar{n}_u^T \underline{\underline{A}}\, \bar{n}_u = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{4}\gamma_{xy} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\varepsilon_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_u = \frac{3}{4}\varepsilon_x - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} + \frac{1}{4}\varepsilon_y$$

2.) $$\varepsilon_v = \bar{n}_v^T \underline{\underline{A}}\, \bar{n}_v = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_x - \frac{1}{4}\gamma_{xy} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} - \frac{1}{2}\varepsilon_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\varepsilon_v = \frac{3}{4}\varepsilon_x + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} + \frac{1}{4}\varepsilon_y}$$

1+2.) $$\varepsilon_u + \varepsilon_v = \frac{3}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y$$

$$\varepsilon_y = 2(\varepsilon_u + \varepsilon_v) - 3\varepsilon_x = \left[2(300+610) - 3\cdot 550\right]\cdot 10^{-6} = 170\cdot 10^{-6}$$

2-1.) $$\varepsilon_v - \varepsilon_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{xy}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{\varepsilon_v - \varepsilon_u}{\sqrt{3}} = \frac{610-300}{\sqrt{3}} = 179{,}0\cdot 10^{-6}$$

$$\underline{\underline{F}} = 2G\left(\underline{\underline{A}} + \frac{A_I}{m-2}\underline{\underline{E}}\right)$$

$$\sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z}{m-2}\right) = 0 \qquad /\cdot(m-2)$$

$$(m-2)\varepsilon_z + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{1-m} = \frac{550+170}{1-3{,}2}\cdot 10^{-6} = -327{,}3\cdot 10^{-6}$$

$$\boxed{\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 550 & 179 & 0 \\ 179 & 170 & 0 \\ 0 & 0 & -327{,}3 \end{bmatrix}\cdot 10^{-6}}$$

$$\underline{\underline{F}} = 2G\left(\underline{\underline{A}} + \frac{A_I}{m-2}\underline{\underline{E}}\right)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2\left(1+\frac{1}{m}\right)} = \frac{210}{2\left(1+\frac{1}{3{,}2}\right)} = 80\ \text{GPa}$$

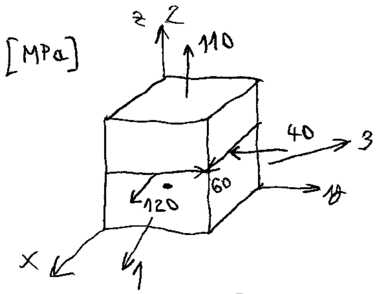
$$\underline{\underline{F}} = 2\cdot 80\cdot 10^{3}\cdot 10^{-6}\left(\begin{bmatrix} 550 & 179 & 0 \\ 179 & 170 & 0 \\ 0 & 0 & -327{,}3 \end{bmatrix} + \underbrace{\frac{550+170-327{,}3}{3{,}2-2}}_{+327{,}3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\boxed{= \begin{bmatrix} 140{,}4 & 28{,}64 & 0 \\ 28{,}64 & 79{,}59 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\text{MPa}}$$

Megjegyzés:
Csak egy nyúlásmérő bélyeg volt koordinátairányban felhelyezve, ezért két egyenletet kellett felírnunk a ferde irányokhoz.
Régebbi példa, ezért $\mathbf{\Phi}$ és $\mathbf{U}$ helyett $\mathbf{F}$ és $\mathbf{A}$, $\mathbf{e}_u$ és $\mathbf{e}_v$ helyett pedig $\mathbf{n}_u$ és $\mathbf{n}_v$ jelölés van.

8. példa: Főfeszültség, főirány.

Egy pont feszültségállapotát az xyz koordinátarendszerben a kis kocka szemlélteti. Írjuk föl a feszültségtenzort! Határozzuk meg a főfeszültségeket és a főirányokat!



$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 120 & 60 & 0 \\ 60 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 110 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$$\det(\underline{\underline{F}} - \sigma_i \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} 120-\sigma_i & 60 & 0 \\ 60 & -40-\sigma_i & 0 \\ 0 & 0 & 110-\sigma_i \end{vmatrix} = (110-\sigma_i)\left[(120-\sigma_i)(-40-\sigma_i) - 60^2\right] = 0$$

$$\downarrow \quad \sigma_i = 110 \text{ MPa}$$

$$\sigma_i^2 - 80\sigma_i - 8400 = 0$$

$$\sigma_i = \frac{80 \pm \sqrt{80^2 + 4 \cdot 8400}}{2} = 40 \pm 100 = \begin{cases} +140 \\ -60 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_1 &= 140 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= 110 \text{ MPa} \\ \sigma_3 &= -60 \text{ MPa} \end{aligned}}$$

$$\sigma_2 = \sigma_z \rightarrow \underline{n}_2 = \underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{\underline{F}} - \sigma_1 \underline{\underline{E}})\,\underline{n}'_1 = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 120-140 & 60 & 0 \\ 60 & -40-140 & 0 \\ 0 & 0 & 110-140 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n'_{1x} \\ n'_{1y} \\ n'_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.) $-20\, n'_{1x} + 60\, n'_{1y} = 0$

2.) $60\, n'_{1x} - 180\, n'_{1y} = 0$

3.) $-30\, n'_{1z} = 0$

3.) $n'_{1z} = 0$

$n'_{1x} := 1$

1.) $n'_{1y} = \frac{20}{60} n'_{1x} = 0{,}3333$

$$\underline{n}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}3333 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |\underline{n}'_1| = \sqrt{1^2 + 0{,}3333^2} = 1{,}054$$

$$\underline{n}_1 = \frac{\underline{n}'_1}{|\underline{n}'_1|} = \frac{1}{1{,}054} \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}3333 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9488 \\ 0{,}3162 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{n}_3 = \begin{bmatrix} -0{,}3162 \\ 0{,}9488 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés:

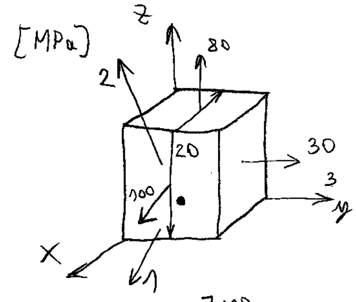
A főirányok egységvektorainak meghatározásánál most nem az $\mathbf{e}_x^2 + \mathbf{e}_y^2 + \mathbf{e}_z^2 = 1$ feltételt használtuk. Az egyik (nem nulla) komponenst felvettük 1-re, majd kiszámoltuk a másikat. Végül a kapott vektorból normálással csináltunk egységvektort.

A nem tengelyirányba mutató egységvektor párját merőlegesítéssel kaptuk.

Régebbi példa, ezért $\mathbf{\Phi}$ helyett $\mathbf{F}$, $\mathbf{e}_i$ helyett pedig $\mathbf{n}_i$ jelölés van.

9. példa: Főfeszültség, főirány.

Egy pont feszültségállapotát az xyz koordinátarendszerben a kis kocka szemlélteti. Írjuk föl a feszültségtenzort! Határozzuk meg a főfeszültségeket és a főirányokat!



$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & -20 \\ 0 & 30 & 0 \\ -20 & 0 & 80 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$$\det\left(\underline{\underline{F}} - \sigma_i \underline{\underline{E}}\right) = \begin{vmatrix} 100-\sigma_i & 0 & -20 \\ 0 & 30-\sigma_i & 0 \\ -20 & 0 & 80-\sigma_i \end{vmatrix} = \underset{\substack{\downarrow \\ \sigma_i = 30\,\text{MPa}}}{(30-\sigma_i)}\left[(100-\sigma_i)(80-\sigma_i) - 20^2\right] = 0$$

$$\sigma_i^2 - 180\sigma_i + 7600 = 0$$

$$\sigma_i = \frac{180 \pm \sqrt{180^2 - 4 \cdot 7600}}{2} = 90 \pm 22{,}36 = \begin{cases} 112{,}4 \\ 67{,}64 \end{cases}$$

$\sigma_1 = 112{,}4$ MPa

$\sigma_2 = 67{,}64$ MPa

$\sigma_3 = 30$ MPa

$$\sigma_3 = \sigma_y \rightarrow \underline{n}_3 = \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\underline{\underline{F}} - \sigma_1 \underline{\underline{E}}\right)\underline{n}'_1 = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 100-112{,}4 & 0 & -20 \\ 0 & 30-112{,}4 & 0 \\ -20 & 0 & 80-112{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n'_{1x} \\ n'_{1y} \\ n'_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.) $-12{,}4\, n'_{1x} - 20\, n'_{1z} = 0$

2.) $-82{,}4\, n'_{1y} = 0$

3.) $-20\, n'_{1x} - 32{,}4\, n'_{1z} = 0$

$$\left.\begin{aligned} &2.)\ n'_{1y} = 0 \\ &n'_{1x} = 1 \\ &1.)\ n'_{1z} = \frac{-12{,}4}{20} n'_{1x} = -0{,}62 \end{aligned}\right\} \underline{n}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -0{,}62 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{n}'_1| = \sqrt{1^2 + 0{,}62^2} = 1{,}177$$

$$\underline{n}_1 = \frac{\underline{n}'_1}{|\underline{n}'_1|} = \frac{1}{1{,}177}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -0{,}62 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8496 \\ 0 \\ -0{,}5268 \end{bmatrix}$$

$$\underline{n}_2 = \begin{bmatrix} +0{,}5268 \\ 0 \\ +0{,}8496 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés:

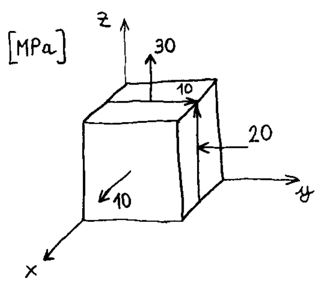
A főirányok egységvektorainak meghatározásánál most nem az $\mathbf{e}_x^2 + \mathbf{e}_y^2 + \mathbf{e}_z^2 = 1$ feltételt használtuk. Az egyik (nem nulla) komponenst felvettük 1-re, majd kiszámoltuk a másikat. Végül a kapott vektorból normálással csináltunk egységvektort.

A nem tengelyirányba mutató egységvektor párját merőlegesítéssel kaptuk.

Régebbi példa, ezért $\mathbf{\Phi}$ helyett $\mathbf{F}$, $\mathbf{e}_i$ helyett pedig $\mathbf{n}_i$ jelölés van.

10. példa: Főfeszültség, főirány.

Egy pont feszültségállapotát az xyz koordinátarendszerben a kis kocka szemlélteti. Írjuk föl a feszültségtenzort! Határozzuk meg a főfeszültségeket és a főirányokat!



$\underline{\underline{F}} = ?$

$\sigma_i = ?$

$\underline{n}_i = ?$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 10 \\ 0 & 10 & 30 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$$\det\left(\underline{\underline{F}} - \sigma_i \underline{\underline{E}}\right) = \begin{vmatrix} 10-\sigma_i & 0 & 0 \\ 0 & -20-\sigma_i & 10 \\ 0 & 10 & 30-\sigma_i \end{vmatrix} = \underset{\downarrow \\ \sigma_i = 10\,\text{MPa}}{(10-\sigma_i)} \underbrace{\left[(-20-\sigma_i)(30-\sigma_i) - 100\right]}_{=0} = 0$$

$$\sigma_i^2 - 10\sigma_i - 700 = 0$$

$$\sigma_i = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 700}}{2} = 5 \pm 26{,}93 = \begin{cases} 31{,}93 \\ -21{,}93 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_1 &= 31{,}93\ \text{MPa} \\ \sigma_2 &= 10\ \text{MPa} \\ \sigma_3 &= -21{,}93\ \text{MPa} \end{aligned}}$$

$$\sigma_2 = \sigma_x \longrightarrow \underline{n}_2 = \underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\underline{\underline{F}} - \sigma_1 \underline{\underline{E}}\right) \underline{n}_1' = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 10-31{,}93 & 0 & 0 \\ 0 & -20-31{,}93 & 10 \\ 0 & 10 & 30-21{,}93 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{1x}' \\ n_{1y}' \\ n_{1z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.) $-21{,}93\, n_{1x}' = 0$

2.) $-51{,}93\, n_{1y}' + 10\, n_{1z} = 0$

3.) $10\, n_{1y}' + 8{,}07\, n_{1z} = 0$

1.) $n_{1x}' = 0$

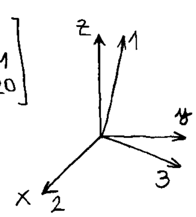
$n_{1y}' := 1$

2.) $n_{1z}' = \frac{51{,}93}{10} n_{1y}' = 5{,}193$

$$\underline{n}_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5{,}193 \end{bmatrix} \qquad |\underline{n}_1'| = \sqrt{1^2 + 5{,}193^2} = 5{,}288$$

$$\underline{n}_1 = \frac{\underline{n}_1'}{|\underline{n}_1'|} = \frac{1}{5{,}288} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5{,}193 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}1891 \\ 0{,}9820 \end{bmatrix}$$

$$\underline{n}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}9820 \\ -0{,}1891 \end{bmatrix}$$



Megjegyzés:

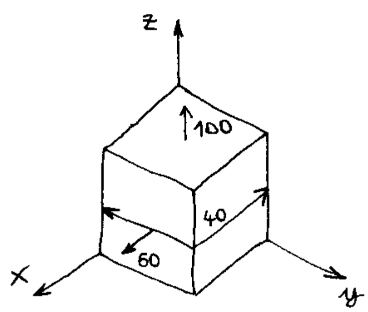
A főirányok egységvektorainak meghatározásánál most nem az $\mathbf{e}_x^2 + \mathbf{e}_y^2 + \mathbf{e}_z^2 = 1$ feltételt használtuk. Az egyik (nem nulla) komponenst felvettük 1-re, majd kiszámoltuk a másikat. Végül a kapott vektorból normálással csináltunk egységvektort.

A nem tengelyirányba mutató egységvektor párját merőlegesítéssel kaptuk.

Régebbi példa, ezért $\mathbf{\Phi}$ helyett $\mathbf{F}$, $\mathbf{e}_i$ helyett pedig $\mathbf{n}_i$ jelölés van.

11. példa: Főfeszültség, főirány.

Egy pont feszültségállapotát az xyz koordinátarendszerben a kis kocka szemlélteti. Írjuk föl a feszültségtenzort! Határozzuk meg a főfeszültségeket!



$$\underline{\underline{F}} = ?$$

$$\sigma_i = ?$$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 60 & -40 & 0 \\ -40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$$\det\left(\underline{\underline{F}} - \sigma_i \underline{\underline{E}}\right) = \begin{vmatrix} 60-\sigma_i & -40 & 0 \\ -40 & 0-\sigma_i & 0 \\ 0 & & 100-\sigma_i \end{vmatrix} = (100-\sigma_i)\left[(60-\sigma_i)(-\sigma_i) - 40^2\right] = 0$$

$$\sigma_i = 100$$

$$\sigma_i^2 - 60\sigma_i - 1600 = 0$$

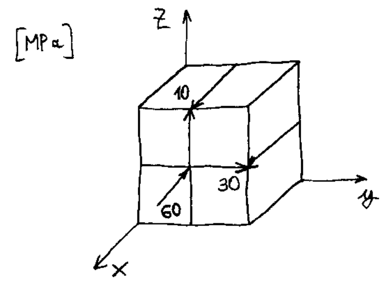
$$\sigma_i = \frac{60 \pm \sqrt{60^2 + 4 \cdot 1600}}{2} = 30 \pm 50 = \begin{cases} 80 \\ -20 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_1 &= 100 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= 80 \text{ MPa} \\ \sigma_3 &= -20 \text{ MPa} \end{aligned}}$$

Megjegyzés:
Az y normálisú lapon nincs normálfeszültség. Ez nem jelenti azt, hogy az y irány főirány, mivel főirány esetén a nyírófeszültség értéke nulla.
Régebbi példa, ezért **Φ** helyett **F** jelölés van.

12. példa: Főfeszültség, főirány.

Egy pont feszültségállapotát az xyz koordinátarendszerben a kis kocka szemlélteti. Írjuk föl a feszültségtenzort! Határozzuk meg a főfeszültségeket és a főirányokat! Számítsuk ki a Mohr és a HMH elmélet szerinti redukált feszültséget!



$\underline{\underline{\phi}} = ?$ $\qquad \sigma_{red,MOHR} = ?$

$\sigma_i = ?$ $\qquad \sigma_{red,HMH} = ?$

$\bar{n}_i = ?$

$$\underline{\underline{\phi}} = \begin{bmatrix} -60 & 30 & 10 \\ 30 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$$\det(\underline{\underline{\phi}} - \sigma_i \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} -60-\sigma_i & 30 & 10 \\ 30 & 0-\sigma_i & 0 \\ 10 & 0 & 0-\sigma_i \end{vmatrix} = 10\left[0 + 10\sigma_i\right] - \sigma_i\left[-\sigma_i(-60-\sigma_i) - 30^2\right] =$$

$$= 100\sigma_i - 60\sigma_i^2 - \sigma_i^3 + 900\sigma_i = -\sigma_i^3 - 60\sigma_i^2 + 1000\sigma_i = -\sigma_i\left(\sigma_i^2 + 60\sigma_i - 1000\right) = 0$$

$$\sigma_i = 0$$

$$\sigma_i = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 + 4\cdot 1000}}{2} = -30 \pm 43{,}59 = \begin{cases} 13{,}59 \\ -73{,}59 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_1 &= 13{,}59 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= -73{,}59 \text{ MPa} \end{aligned}}$$

$$(\underline{\underline{\phi}} - \sigma_1 \underline{\underline{E}})\,\bar{n}'_1 = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} -60-13{,}59 & 30 & 10 \\ 30 & 0-13{,}59 & 0 \\ 10 & 0 & 0-13{,}59 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n'_{1x} \\ n'_{1y} \\ n'_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.) $-73{,}59\, n'_{1x} + 30\, n'_{1y} + 10\, n'_{1z} = 0$

2.) $30\, n'_{1x} - 13{,}59\, n'_{1y} = 0$

3.) $10\, n'_{1x} - 13{,}59\, n'_{1z} = 0$

$n'_{1x} := 1$

2.) $n'_{1y} = \dfrac{30}{13{,}59} n'_{1x} = 2{,}208$

3.) $n'_{1z} = \dfrac{10}{13{,}59} = 0{,}7358$

$$\bar{n}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2{,}208 \\ 0{,}7358 \end{bmatrix} \qquad |\bar{n}'_1| = \sqrt{1^2 + 2{,}208^2 + 0{,}7358^2} = 2{,}533$$

$$\bar{n}_1 = \frac{\bar{n}'_1}{|\bar{n}'_1|} = \frac{1}{2{,}533}\begin{bmatrix} 1 \\ 2{,}208 \\ 0{,}7358 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3948 \\ 0{,}8717 \\ 0{,}2905 \end{bmatrix}$$

$$\left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_2 \underline{\underline{E}}\right)\bar{n}_2' = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} -60-0 & 30 & 10 \\ 30 & 0-0 & 0 \\ 10 & 0 & 0-0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_{2x}' \\ n_{2y}' \\ n_{2z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.) $-60\, n_{2x}' + 30\, n_{2y}' + 10\, n_{2z}' = 0$

2.) $30\, n_{2x}' = 0$

3.) $10\, n_{2x}' = 0$

2, 3.) $n_{2x}' = 0$

$n_{2y}' := 1$

1.) $n_{2z}' = \dfrac{60\, n_{2x}' - 30\, n_{2y}'}{10} = -3$

$$\bar{n}_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad |\bar{n}_2'| = \sqrt{1^2 + 3^2} = 3{,}162$$

$$\bar{n}_2 = \frac{\bar{n}_2'}{|\bar{n}_2'|} = \frac{1}{3{,}162}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}3163 \\ -0{,}9488 \end{bmatrix}$$

$$\bar{n}_3 = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0{,}3984 & 0{,}8717 & 0{,}2905 \\ 0 & 0{,}3163 & -0{,}9488 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}9190 \\ 0{,}3780 \\ 0{,}1260 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\sigma_{red,MOHR} = \sigma_1 - \sigma_3 = 13{,}59 - (-73{,}59) = 87{,}18\ \text{MPa}}$$

$$\sigma_{red,HMH} = \sqrt{\sigma_I^2 - 3\,\sigma_{II}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 13{,}59 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -73{,}59 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$$\boxed{\sigma_{red,HMH} = \sqrt{(-60)^2 - 3(0 - 13{,}59 \cdot 73{,}59 + 0)} = 81{,}24\ \text{MPa}}$$

Megjegyzés:
Most olyan volt a feladat, hogy egyik koordinátairány sem volt főirány. Ilyen esetben a determináns kifejtésével hiányos harmadfokú polinomot kapunk. Mivel nincs konstans tag, σ_i kiemelhető, és csak egy másodfokú egyenletet kell megoldanunk. Ennek nem fizikai oka van, hanem csak olyan példát adnak, amit másodfokú megoldóképlettel meg lehet oldani.
A HMH redukált feszültséget a főirányokhoz tartozó (a főfeszültségeket tartalmazó) feszültségtenzorból számítottuk. Ezt azért tehettük meg, mert az invariánsok tulajdonsága éppen az, hogy nem változnak meg a tenzor felírásához használt koordinátarendszer elforgatása esetén. Kiszámításuk pedig a főirányok rendszerében a legegyszerűbb.
Régebbi példa, ezért $\mathbf{e}_i$ helyett $\mathbf{n}_i$ jelölés van.

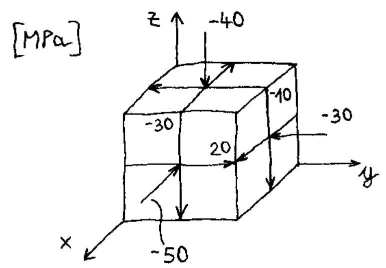
13. példa: Főfeszültség, főirány.

Adott egy ponthoz tartozó feszültségtenzor az xyz koordinátarendszerben. Szemléltessük a feszültségállapotot kis kockán! Határozzuk meg a főfeszültségeket!

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} -50 & 20 & -30 \\ 20 & -30 & -10 \\ -30 & -10 & -40 \end{bmatrix} \text{MPa} \qquad \nu = 0{,}25 \qquad G = 80\,\text{GPa}$$

kocka?

$\sigma_i = ?$



$$\det(\underline{\underline{F}} - \sigma_i \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} -50-\sigma_i & 20 & -30 \\ 20 & -30-\sigma_i & -10 \\ -30 & -10 & -40-\sigma_i \end{vmatrix} =$$

$$= (-50-\sigma_i)\begin{vmatrix} -30-\sigma_i & -10 \\ -10 & -40-\sigma_i \end{vmatrix} - 20\begin{vmatrix} 20 & -10 \\ -30 & -40-\sigma_i \end{vmatrix} - 30\begin{vmatrix} 20 & -10 \\ -30 & -40-\sigma_i \end{vmatrix} =$$

$$= (-50-\sigma_i)\left[(-30-\sigma_i)(-40-\sigma_i) - 100\right] - 20\left[20(-40-\sigma_i) - 300\right] - 30\left[-200 - (-30-\sigma_i)(-30)\right] =$$

$$= (-50-\sigma_i)(\sigma_i^2 + 70\sigma_i + 1100) - 20(-20\sigma_i - 1100) - 30(-30\sigma_i - 1100) =$$

$$= -\sigma_i^3 - 70\sigma_i^2 - 1100\sigma_i - 50\sigma_i^2 - 3500\sigma_i - 5500 + 400\sigma_i + 22000 + 900\sigma_i + 33000 =$$

$$= -\sigma_i^3 - 120\sigma_i^2 - 3300\sigma_i = -\sigma_i(\sigma_i^2 + 120\sigma_i + 3300) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_i = 0$$

$$\sigma_i^2 + 120\sigma_i + 3300 = 0$$

$$\sigma_i = \frac{-120 \pm \sqrt{120^2 - 4\cdot 3300}}{2} = -60 \pm 17{,}32 = \begin{cases} -42{,}68 \\ -77{,}32 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_1 &= 0 \\ \sigma_2 &= -42{,}68\ \text{MPa} \\ \sigma_3 &= -77{,}32\ \text{MPa} \end{aligned}}$$

Megjegyzés:
Most olyan volt a feladat, hogy egyik koordinátairány sem volt főirány. Ilyen esetben a determináns kifejtésével hiányos harmadfokú polinomot kapunk. Mivel nincs konstans tag, σ_i kiemelhető, és csak egy másodfokú egyenletet kell megoldanunk. Ennek nem fizikai oka van, hanem csak olyan példát adnak, amit másodfokú megoldóképlettel meg lehet oldani.
Régebbi példa, ezért **Φ** helyett **F** jelölés van.

14. példa: Invariánsok, redukált feszültség.

Adott egy ponthoz tartozó feszültségtenzor az xyz koordinátarendszerben. Számítsuk ki a feszültségtenzor invariánsait. Határozzuk meg a HMH elmélet szerinti redukált feszültséget!

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 120 & 36 & 48 \\ 36 & -14{,}4 & -19{,}2 \\ 48 & -19{,}2 & -25{,}6 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$$F_I = 120 - 14{,}4 - 25{,}6 = 80 \text{ MPa}$$

$$F_{II} = \begin{vmatrix} -14{,}4 & -19{,}2 \\ -19{,}2 & -25{,}6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 120 & 48 \\ 48 & -25{,}6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 120 & 36 \\ 36 & -14{,}4 \end{vmatrix} =$$

$$= (368{,}6 - 368{,}6) + (-3072 - 2304) + (-1728 - 1296) = -8400$$

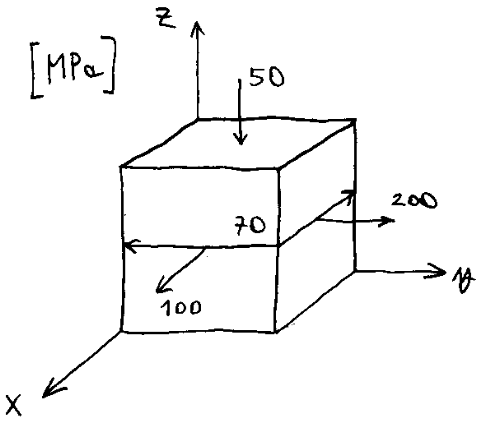
$$F_{III} = (44237 - 33178 - 33178) - (44237 - 33178 - 33178) = 0$$

$$\boxed{\sigma_{red,HMH} = \sqrt{F_I^2 - 3F_{II}} = \sqrt{80^2 - 3(-8400)} = 177{,}8 \text{ MPa}}$$

Megjegyzés:
Régebbi példa, ezért **Φ** helyett **F** jelölés van.

15. példa: Az általános Hooke-törvény egy további alakja (lásd az előző PDF doksiban).

Egy pont feszültségállapotát az xyz koordinátarendszerben a kis kocka szemlélteti. Számítsuk ki a főfeszültségeket! Számítsuk ki a nyúlásokat és a szögtorzulásokat az xyz koordinátarendszerben. Számítsuk ki a főnyúlásokat!



$E = 210\ GPa$

$m = 3{,}1$

$\sigma_i = ?$

$\varepsilon_x\ ;\ \varepsilon_y\ ;\ \varepsilon_z = ?$

$\gamma_{xy}\ ;\ \gamma_{xz}\ ;\ \gamma_{yz} = ?$

$\varepsilon_1\ ;\ \varepsilon_2\ ;\ \varepsilon_3 = ?$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 100 & -70 & 0 \\ -70 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} MPa$$

$$\begin{vmatrix} 100-\sigma_i & -70 & 0 \\ -70 & 200-\sigma_i & 0 \\ 0 & 0 & -50-\sigma_i \end{vmatrix} = (-50-\sigma_i)\left[(100-\sigma_i)(200-\sigma_i)-70^2\right] = 0$$

$$\sigma_i = -50\ MPa \qquad \sigma_i^2 - 300\sigma_i + 15100 = 0$$

$$\sigma_i = \frac{300 \pm \sqrt{300^2 - 4\cdot 15100}}{2} = 150 \pm 86 = \begin{cases} 236 \\ 64 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_1 &= 236\ MPa \\ \sigma_2 &= 64\ MPa \\ \sigma_3 &= -50\ MPa \end{aligned}}$$

$$\boxed{\varepsilon_x} = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y+\sigma_z}{m}\right) = \frac{1}{210\cdot 10^3}\left(100 - \frac{200-50}{3{,}1}\right) = \boxed{2{,}46\cdot 10^{-4}}$$

$$\boxed{\varepsilon_y} = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_x+\sigma_z}{m}\right) = \frac{1}{210\cdot 10^3}\left(200 - \frac{100-50}{3{,}1}\right) = \boxed{8{,}76\cdot 10^{-4}}$$

$$\boxed{\varepsilon_z} = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{m}\right) = \frac{1}{210\cdot 10^3}\left(-50 - \frac{100+200}{3{,}1}\right) = \boxed{-6{,}99\cdot 10^{-4}}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2\left(1+\frac{1}{m}\right)} = \frac{210}{2\left(1+\frac{1}{3{,}1}\right)} = 79{,}39\ \text{GPa}$$

$$\boxed{\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{-70}{79{,}39\cdot 10^{3}} = -8{,}817\cdot 10^{-4}}$$

$$\tau_{xz} = 0 \longrightarrow \boxed{\gamma_{xz} = 0}$$

$$\tau_{yz} = 0 \longrightarrow \boxed{\gamma_{yz} = 0}$$

$$\boxed{\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{m}\right) = \frac{1}{210\cdot 10^{3}}\left(236 - \frac{64-50}{3{,}1}\right) = 1{,}10\cdot 10^{-3}}$$

$$\boxed{\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1+\sigma_3}{m}\right) = \frac{1}{210\cdot 10^{3}}\left(64 - \frac{236-50}{3{,}1}\right) = 1{,}90\cdot 10^{-5}}$$

$$\boxed{\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{m}\right) = \frac{1}{210\cdot 10^{3}}\left(-50 - \frac{236+64}{3{,}1}\right) = -6{,}99\cdot 10^{5}}$$

Megjegyzés:
A főnyúlások kiszámításához nem kellett megoldanunk a sajátérték-feladatot az alakváltozási mátrixra, mert a főfeszültségeket már kiszámoltuk, és tudjuk, hogy a főfeszültségi és a főnyúlási irányok egybeesnek, így főfeszültségek és a főnyúlások ugyanúgy átszámíthatók egymásba, ahogy az xyz rendszerben (lásd még az elméleti doksiban).
Az ε_3 főnyúlás azért lett egyenlő az ε_z-vel, mert a z irány éppen a 3. főfeszültségi/főnyúlási irány.
Régebbi példa, ezért **Φ** helyett **F** jelölés van.

16. példa: Egy kicsit nehezebb feladat, ahol a mátrix-egyenletek által adott összefüggések koordinátánként felírt alakját kell alkalmazni:

Adott a feszültségi- és az alakváltozási tenzor felépítése. A nem zérus elemek közül csak ε_x ismert. Számítsuk ki a többi elemet! Határozzuk meg a főfeszültségeket és a főnyúlásokat! Adjuk meg a Mohr és a HMH elmélet szerint számított redukált feszültség értékét!

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_x = 2 \cdot 10^{-4}$

$m = 3{,}5$

$G = 80\ \text{GPa}$

$\sigma_i = ?$ $\quad \sigma_{red,MOHR} = ?$

$\varepsilon_i = ?$ $\quad \sigma_{red,HMH} = ?$

$$\underline{\underline{F}} = 2G\left(\underline{\underline{A}} + \frac{A_I}{m-2}\right)$$

$$\sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_z}{m-2}\right) = 0 \rightarrow \varepsilon_z = (1-m)\varepsilon_x = (1-3{,}5) \cdot 2 \cdot 10^{-4} = -5 \cdot 10^{-4}$$

$$\sigma_y = 2G\left(\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_z}{m-2}\right) = 2 \cdot 80 \cdot 10^3 \left(0 + \frac{2-5}{3{,}5-2}\right) \cdot 10^{-4} = -32\ \text{MPa}$$

$$\sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_z}{m-2}\right) = 2 \cdot 80 \cdot 10^3 \left(-5 + \frac{2-5}{3{,}5-2}\right) \cdot 10^{-4} = -112\ \text{MPa}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_x = 0 \\ \sigma_2 &= \sigma_y = -32\ \text{MPa} \\ \sigma_3 &= \sigma_z = -112\ \text{MPa} \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_x = 2 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_y = 0 \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_z = -5 \cdot 10^{-4} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\sigma_{red,MOHR} = \sigma_1 - \sigma_3 = 0 - (-112) = 112\ \text{MPa}}$$

$$F_I = 0 + \sigma_y + \sigma_z = (-32) + (-112) = -144\ \text{MPa}$$

$$F_{II} = \begin{vmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{vmatrix} = \sigma_y \sigma_z = (-32) \cdot (-112) = +3584$$

$$\boxed{\sigma_{red,HMH} = \sqrt{F_I^2 - 3F_{II}} = \sqrt{144^2 - 3 \cdot 3584} = 99{,}92\ \text{MPa}}$$

Megjegyzés:
Régebbi példa, ezért **Φ** helyett **F** jelölés van.