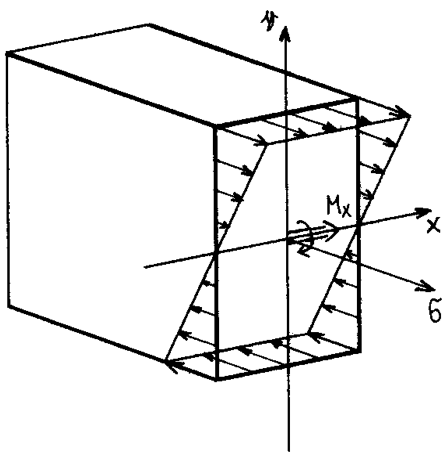
# Navier-formula

Akkor beszélünk egyenes hajlításról, ha a nyomatékvektor egybeesik valamelyik fő-másodrendű nyomatéki tengellyel. A hajlítást mindig súlyponti koordinátarendszerben értelmezzük. Ez még a ferde hajlításra is igaz.

Egyenes hajlítás az x tengely körül:

$$\sigma(y) = \frac{M_x}{I_x} y$$

A feszültségeloszlás lineáris, az x tengelyen átmenő ferde sík:

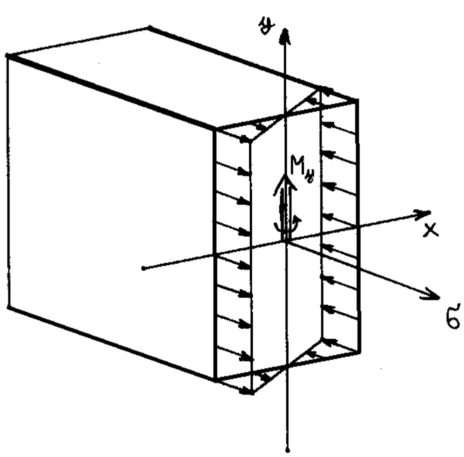



Feszültségek a sík belsejében is vannak, nem csak a peremen. A hajlítás tengelye és a semleges tengely (amely vonal mentén nulla a feszültség) is az x tengely.

Egyenes hajlítás az y tengely körül:

$$\sigma(x) = -\frac{M_y}{I_y} x$$

A feszültségeloszlás lineáris, az y tengelyen átmenő ferde sík:

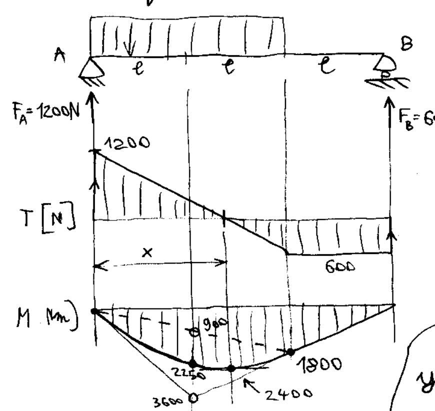


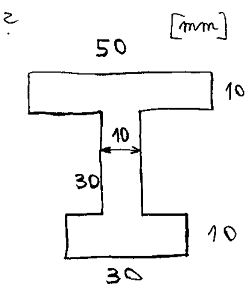

Feszültségek a sík belsejében is vannak, nem csak a peremen. A hajlítás tengelye és a semleges tengely (amely vonal mentén nulla a feszültség) is az y tengely.
Az ábrából látható, hogy azért van negatív előjel a képletben, mert pozitív (felfelé mutató) My nyomaték esetén a pozitív x-ekhez (jobb oldal) negatív (nyomó, befelé mutató) feszültség tartozik.

**1. példa**: A 3. gyakorlat 2. feladata. Itt megnézhetjük a statikai számítás részleteit is.

Számítsuk ki a legnagyobb húzófeszültség és a legnagyobb nyomófeszültség értékét! Hol alakulnak ki ezek az értékek? Ábrázoljuk a feszültségeloszlást!

$q = 300\ N/m \qquad \ell = 3\ m \qquad \sigma_{max} = ? \quad \sigma_{min} = ?$




$$\Sigma M_A = 0 = -q \cdot 2\ell \cdot \ell + F_B \cdot 3\ell$$

$$F_B = \frac{2}{3} q\ell = \frac{2}{3} \cdot 300 \cdot 3 = 600\ N$$

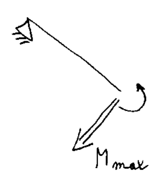
$$\Sigma F_y = 0 = F_A - q\ell + F_B \rightarrow F_A = 1200\ N$$

$$T(x) = 1200 - qx = 0$$

$$x = \frac{1200}{300} = 4\ m$$

$$M_{max} = M(x) = F_A x - q\frac{x^2}{2}$$

$$M_{max} = 1200 \cdot 4 - 300\frac{4^2}{2} = 2400\ Nm$$



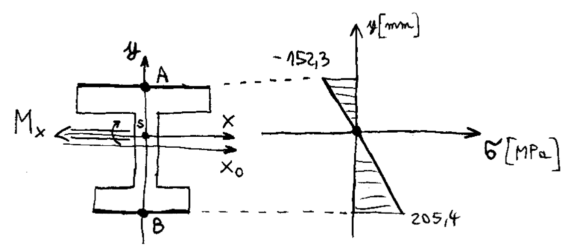

$$y_s = \frac{0 + 20 \cdot 50 \cdot 10 - 20 \cdot 30 \cdot 10}{10 \cdot 30 + 50 \cdot 10 + 30 \cdot 10} = \frac{4000}{1100} = 3{,}636\ mm$$

$$I_{x_s} = \frac{30^3 \cdot 10}{12} + \left(\frac{10^3 \cdot 50}{12} + 20^2 \cdot 50 \cdot 10\right) + \left(\frac{10^3 \cdot 30}{12} + 20^2 \cdot 30 \cdot 10\right) - 3{,}636^2 \cdot 1100$$

$$I_{x_s} = 3{,}346 \cdot 10^5\ mm^4$$

$$M_x = -M_{max} = -2400\ Nm$$

$$\sigma(y) = \frac{M_x}{I_x} y$$



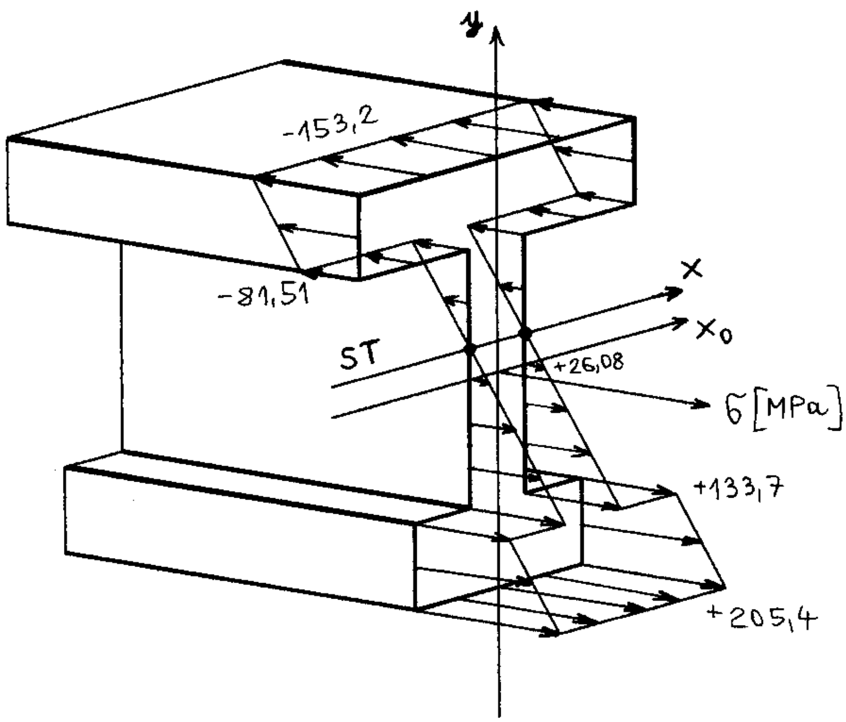

$$\boxed{\sigma_{max}} = \sigma_B = \frac{M_x}{I_x} y_B = \frac{-2400 \cdot 10^3}{3{,}346 \cdot 10^5}(-25 - 3{,}636) = \boxed{= +205{,}4\ MPa}$$

$$\boxed{\sigma_{min}} = \sigma_A = \frac{M_x}{I_x} y_A = \frac{-2400 \cdot 10^3}{3{,}346 \cdot 10^5}(+25 - 3{,}636) = \boxed{= -153{,}2\ MPa}$$

Megjegyzés:
A statikai megoldást az xy helyett a zy koordinátarendszerben kellene elvégezni, ahogy az órán is jelöltük.
A maximális hajlítófeszültségek a tartó azon keresztmetszetének a szélső szálaiban alakulnak ki, ahol a legnagyobb a hajlító-igénybevétel.
Az $x_0$ tengelyt a keresztmetszet felénél vettük fel.

A feszültségeloszlás térbeli ábrázolása:

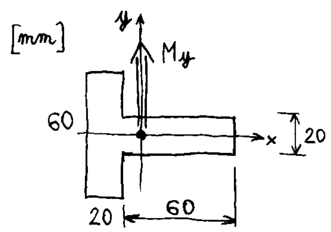
| y [mm] | $\sigma$ [MPa] | Megjegyzés |
|---|---|---|
| +25-3,636=21,364 | -153,2 | Szélső szál (min.fesz., max.nyomó) |
| +15-3,636=11,364 | -81,51 | A gerinc és a felső öv csatlakozása |
| 0 | 0 | Semleges szál (súlyponti x tengely) |
| -3,636 | +26,08 | Eredeti $x_0$ tengely |
| -(15+3,636)=-18,636 | +133,7 | A gerinc és az alsó öv csatlakozása |
| -(25+3,636)=-28,636 | +205,4 | Szélső szál (max.fesz., max.húzó) |




Megjegyzés:
Ezen az ábrán az $x_0$ tengelyhez csatlakozik a $\sigma$ tengely, pedig az x tengelyhez kellene rajzolni, mert ahhoz tartozik $y = 0$ érték is. Rövidesen javítani fogom…

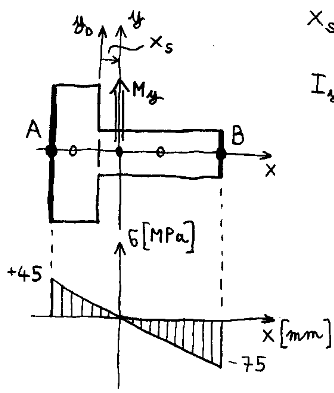
**2. példa**: A 3. gyakorlat 3. feladata.

Mekkora legyen a pozitív $M_y$ nyomaték, hogy a keresztmetszetben ébredő legnagyobb feszültség éppen a megengedett legyen? Az anyag azonosan reagál a húzó- és a nyomófeszültségre, vagyis a legnagyobb feszültség abszolút értékben értendő. Mekkora lesz így a húzó és a nyomó feszültség csúcsértéke? Hol ébrednek ezek a feszültségek? Rajzoljuk meg a feszültségeloszlás ábráját!




$$\sigma_{meg} = 75 \text{ MPa}$$
$$M_y = ?$$
$$\sigma_{max} = ?$$
$$\sigma_{min} = ?$$

---




$$x_S = \frac{(-10)\cdot 20\cdot 60 + (+30)\cdot 60\cdot 20}{20\cdot 60 + 60\cdot 20} = \frac{+24000}{2400} = +10 \text{ mm}$$

$$I_y = \frac{20^3\cdot 60}{3} + \frac{60^3\cdot 20}{3} - 10^2\cdot 2400 = 1{,}36\cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$|x_B| > |x_A| \longrightarrow |\sigma_B| > |\sigma_A|$$

$$\sigma_{meg} \geq |\sigma_B| = \frac{|M_y|}{I_y}|x_B|$$

$$|M_y| \leq \frac{\sigma_{meg}\, I_y}{|x_B|} = \frac{75\cdot 1{,}36\cdot 10^6}{50} = 2{,}04\cdot 10^6 \text{ Nmm} = 2040 \text{ Nm}$$

$$M_y > 0 \longrightarrow \boxed{M_y = +2040 \text{ Nm}}$$

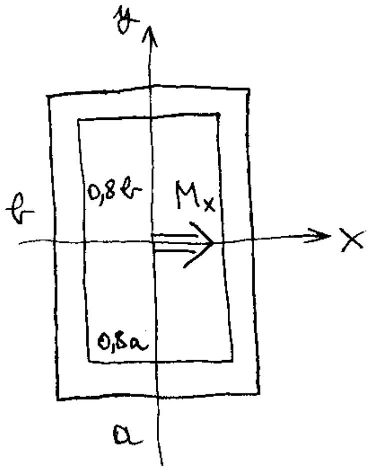
$$\boxed{\sigma_{max}} = \sigma_A = \frac{-M_y}{I_y}x_A = \frac{-(+2040\cdot 10^3)}{1{,}36\cdot 10^6}\cdot(-30) \boxed{= +45 \text{ MPa}}$$

$$\boxed{\sigma_{min}} = \sigma_B = \frac{-M_y}{I_y}x_B = -\sigma_{meg} \boxed{= -75 \text{ MPa}}$$

Megjegyzés:
A legnagyobb feszültség valamelyik szélső szálban ébred. Ezek közül most a nyomott, B jelű van messzebb a semleges száltól, ezért abszolút értékben itt lesz a legnagyobb a feszültség. Ezt egyenlővé téve a megengedett feszültséggel, megkapjuk a nyomaték nagyságát. Mivel $M_y$ felfelé mutat (pozitív), ez egyben a nyomaték értéke is. A legnagyobb húzófeszültség az A pontban, a legnagyobb nyomófeszültség pedig a B pontban ébred. Utóbbi nagysága éppen egyenlő a megengedett feszültséggel, mert erre a pontra méreteztünk.

**3. példa**: A 3. gyakorlat 4. feladata.

Legalább mekkorának kell lennie a b méretnek, hogy a keresztmetszetben sehol ne lépjük túl a megengedett feszültséget?




$a = 0{,}02\ m$

$\sigma_{meg} = 120\ MPa$

$M_x = 800\ Nm$

$b = ?$

$$I_x = \frac{b^3 a}{12} - \frac{(0{,}8\,b)^3 \cdot 0{,}8\,a}{12} = \frac{a\,b^3}{12}\left(1 - 0{,}8^4\right)$$

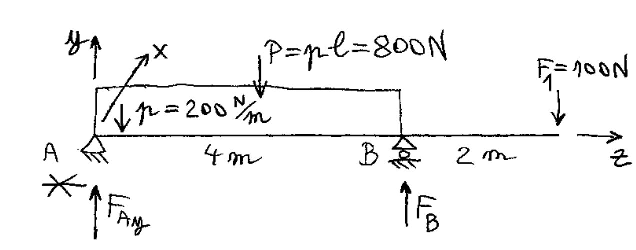
$$\sigma_{meg} \geq \sigma_{max} = \frac{M_x}{I_x}\,\frac{b}{2} = \frac{M_x}{\frac{a\,b^3}{12}\left(1-0{,}8^4\right)}\,\frac{b}{2} = \frac{6}{1-0{,}8^4}\,\frac{M_x}{a\,b^2}$$

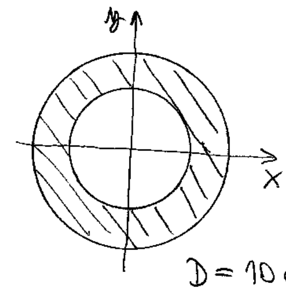
$$\boxed{b \geq \sqrt{\frac{6}{1-0{,}8^4}\,\frac{M_x}{a\,\sigma_{meg}}} = \sqrt{\frac{6}{1-0{,}8^4}\,\frac{800 \cdot 10^3}{20 \cdot 120}} = 58{,}20\ mm}$$

4

**4. példa**: A 3. gyakorlat 2. példájához hasonló feladat.

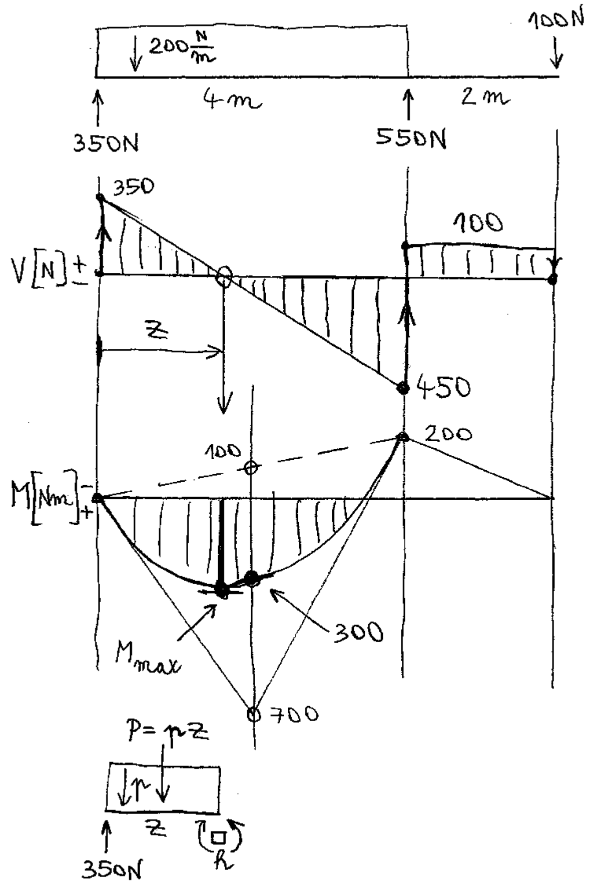
Határozzuk meg a hajlításból származó legnagyobb feszültséget!




D = 10 cm

d = 8 cm




$\sum F_z = 0 \rightarrow \underline{F_{Az} = 0}$

$\sum M_A = 0 = -P\cdot 2 + F_B \cdot 4 - F_1 \cdot 6$

$\underline{F_B} = \frac{P+3F_1}{2} = \frac{800+3\cdot 100}{2} = \underline{550\,N\,(\uparrow)}$

$\sum F_y = 0 = F_{Ay} - P + F_B - F_1$

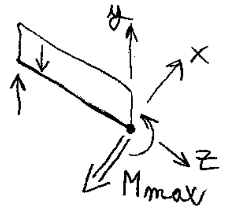
$\underline{F_{Ay}} = P - F_B + F_1 = 800-550+100 = \underline{350\,N\,(\uparrow)}$

$V(z) = 350 - p z = 0$

$\underline{z} = \frac{350}{p} = \frac{350}{200} = \underline{1{,}75\,m}$

$\underline{M_{max}} = M(z) = 350\cdot z - p z \frac{z}{2} =$

$= 350\cdot 1{,}75 - 200\,\frac{1{,}75^2}{2} = \underline{306{,}3\,Nm}$



$$I_x = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{64} = \frac{(100^4 - 80^4)\pi}{64} = 2{,}898 \cdot 10^6 \, mm^4$$

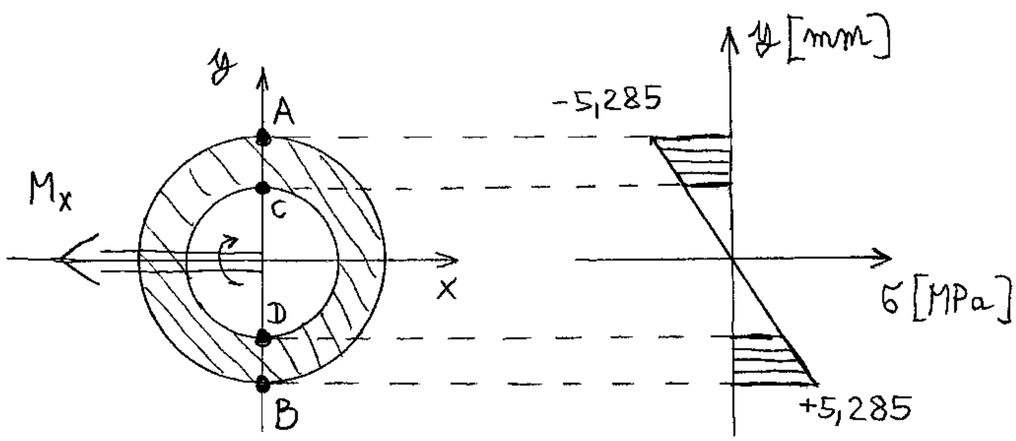
$$M_x = -M_{max} = -306{,}3 \, Nm$$

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_x} y_A = \frac{-306{,}3 \cdot 10^3}{2{,}898 \cdot 10^6} \cdot (+50) = -5{,}285 \, MPa$$

$$\sigma_B = \frac{M_x}{I_x} y_B = \frac{-306{,}3 \cdot 10^3}{2{,}898 \cdot 10^6} \cdot (-50) = +5{,}285 \, MPa$$

$$\boxed{\sigma_{mért} = 5{,}285 \, MPa}$$

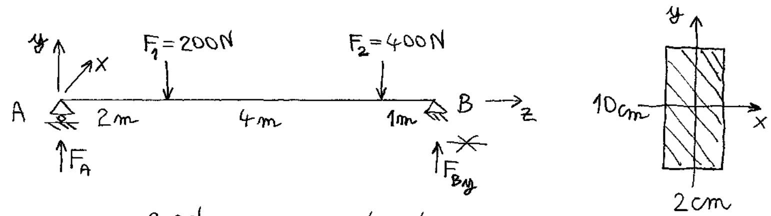
$$\boxed{|\sigma|_{max} = \sigma_{mért} = 5{,}285 \, MPa}$$

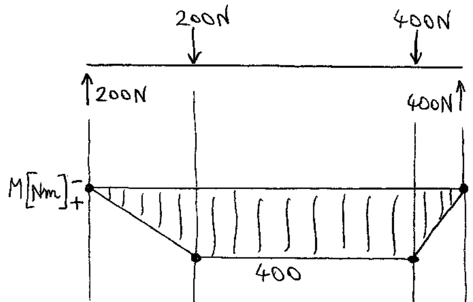



Megjegyzés:
Mivel a kérdésben „legnagyobb feszültséget” kérdeztek, de nem tették hozzá, hogy húzó vagy nyomó, ezért rájöttünk, hogy az abszolút értékben legnagyobb feszültséget kérdezik.
A keresztmetszet szimmetriája miatt a legnagyobb húzó és a legnagyobb nyomó feszültség abszolút értékben egyenlő.
Gyakorlásképpen kiszámíthatjuk, hogy mekkora a feszültség a C és a D pontban.

**5. példa**: A 3. gyakorlat 2. példájához hasonló feladat.

Határozzuk meg a tartóban a hajlításból származó legnagyobb feszültséget!



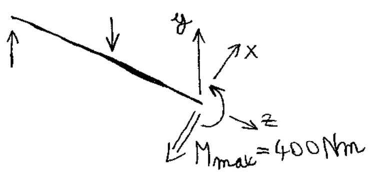

$\sum F_z = 0 \rightarrow F_{Bz} = 0$

$\sum M_B = 0 = -F_A\cdot 7 + F_1\cdot 5 + F_2\cdot 1$

$F_A = \frac{5F_1+F_2}{7} = \frac{5\cdot 200+400}{7} = 200\ N\ (\uparrow)$

$\sum F_y = 0 = F_A - F_1 - F_2 + F_{By}$

$F_{By} = F_1 + F_2 - F_{By} = 200+400-200 = 400\ N\ (\uparrow)$

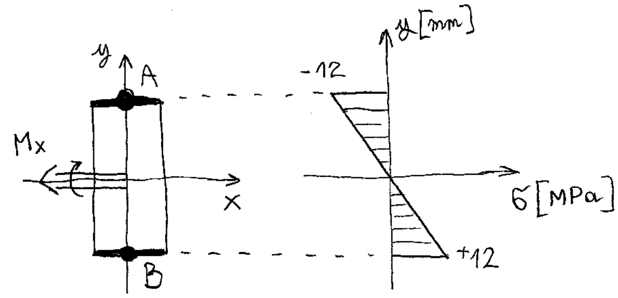



$M_x = -M_{max} = -400\ Nm$

$I_x = \frac{100^3\cdot 20}{12} = 1{,}667\cdot 10^6\ mm^4$

$\boxed{|\sigma|_{max} = \sigma_{mért}} = \max|\sigma(y)| = |\sigma_A| = |\sigma_B| = \frac{|M_x|}{I_x}|y_A| =$

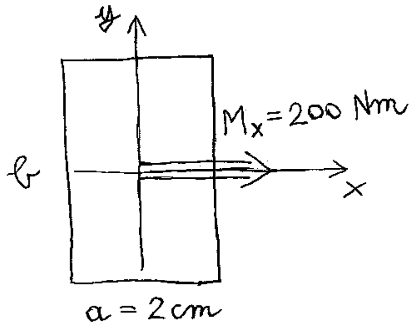
$\boxed{= \frac{400\cdot 10^3}{1{,}667\cdot 10^6}\cdot 50 = 12\ MPa}$




Megjegyzés:
Mivel a kérdésben „legnagyobb feszültséget” kérdeztek, de nem tették hozzá, hogy húzó vagy nyomó, ezért rájöttünk, hogy az abszolút értékben legnagyobb feszültséget kérdezik.
A keresztmetszet szimmetriája miatt a legnagyobb húzó és a legnagyobb nyomó feszültség abszolút értékben egyenlő.

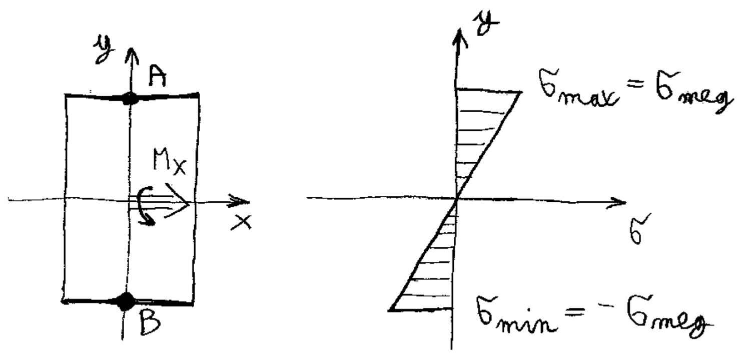
**6. példa**: A 3. gyakorlat 4. példájához hasonló méretezési feladat.

Határozzuk meg b értékét úgy, hogy a vizsgált keresztmetszetben ébredő maximális feszültség ne lépje túl a $\sigma_{max} = 100\,\mathrm{MPa}$ értéket!




$$\sigma_{meg} = 100\ \mathrm{MPa}$$

$$b = ?$$




$$M_x = +200\ \mathrm{Nm}$$

$$I_x = \frac{b^3 a}{12}$$

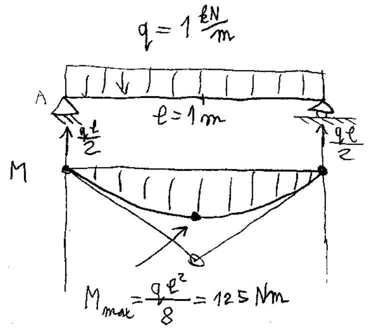
$$\sigma_{meg} \geq \sigma_{mért} = \sigma_{max} = \sigma_A = \frac{M_x}{I_x} y_A = \frac{M_x}{\frac{a b^3}{12}} \frac{b}{2} = \frac{6 M_x}{a b^2}$$

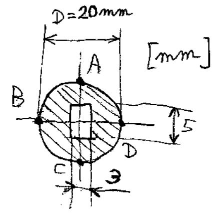
$$\boxed{b \leq \sqrt{\frac{6 M_x}{a\, \sigma_{meg}}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 200 \cdot 10^3}{20 \cdot 100}} = 24{,}49\ \mathrm{mm}}$$

Megjegyzés:
Bár a feladat szövegében $\sigma_{max}$-ot írtak, mi rájöttünk, hogy ez a megengedett legnagyobb feszültség, és az adatoknál már így jelöltük.

**7. példa**: A 3. gyakorlat 2. példájához hasonló feladat.

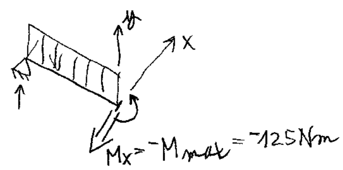
Számítsuk ki a normálfeszültséget a kritikus keresztmetszet A…H pontjaiban! Szemléltessük a feszültségeloszlást a keresztmetszet mentén!




$\sigma_{A \dots D} = ?$

fesz. eo. ?




$$I_x = \frac{20^4 \pi}{64} - \frac{5^3 \cdot 3}{12} = 7823 \text{ mm}^4$$

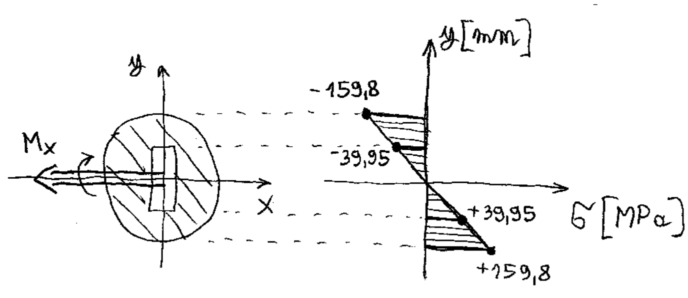
$$\boxed{\sigma_A = \frac{M_x}{I_x} y_A = \frac{-125\,000}{7823} \cdot 10 = -159{,}8 \text{ MPa}}$$

$$\boxed{\sigma_B = \sigma_D = 0}$$

$$\boxed{\sigma_C = -\sigma_A = 159{,}8 \text{ MPa}}$$

$$\boxed{\sigma_E = \sigma_F = \frac{M_x}{I_x} y_E = \frac{-125 \cdot 10^3}{7823} (+2{,}5) = -39{,}95 \text{ MPa}}$$

$$\boxed{\sigma_G = \sigma_H = -\sigma_E = +39{,}95 \text{ MPa}}$$

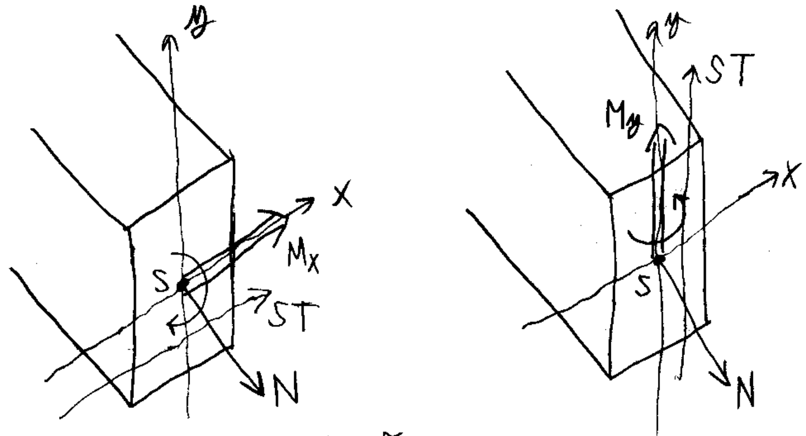



Megjegyzés:
A kritikus keresztmetszet az, amelyikben a legnagyobb hajlítóigénybevétel ébred. Ebben lesznek maximálisak a feszültségek.
Vigyázat, a feladatban van G-pont!

# Húzás/nyomás + egyenes hajlítás

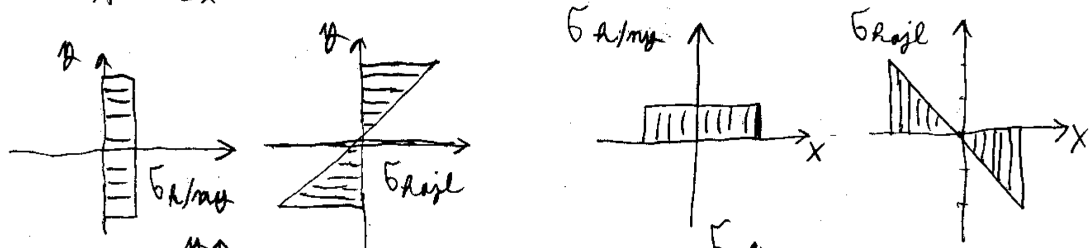
**Elmélet:**

A feszültségeloszlás a húzás/nyomás és az egyenes hajlítás feszültségeloszlásának szuperpozíciója. A hajlításra jellemző lineáris függvény eltolódik a húzó/nyomó igénybevételnek megfelelő konstans értékkel. Emiatt a semleges tengely is elmozdul. Helyzetét a feszültség zérus értékére vonatkozó feltételből határozzuk meg.




$$\sigma = \sigma_{h/ny} + \sigma_{hajl}$$

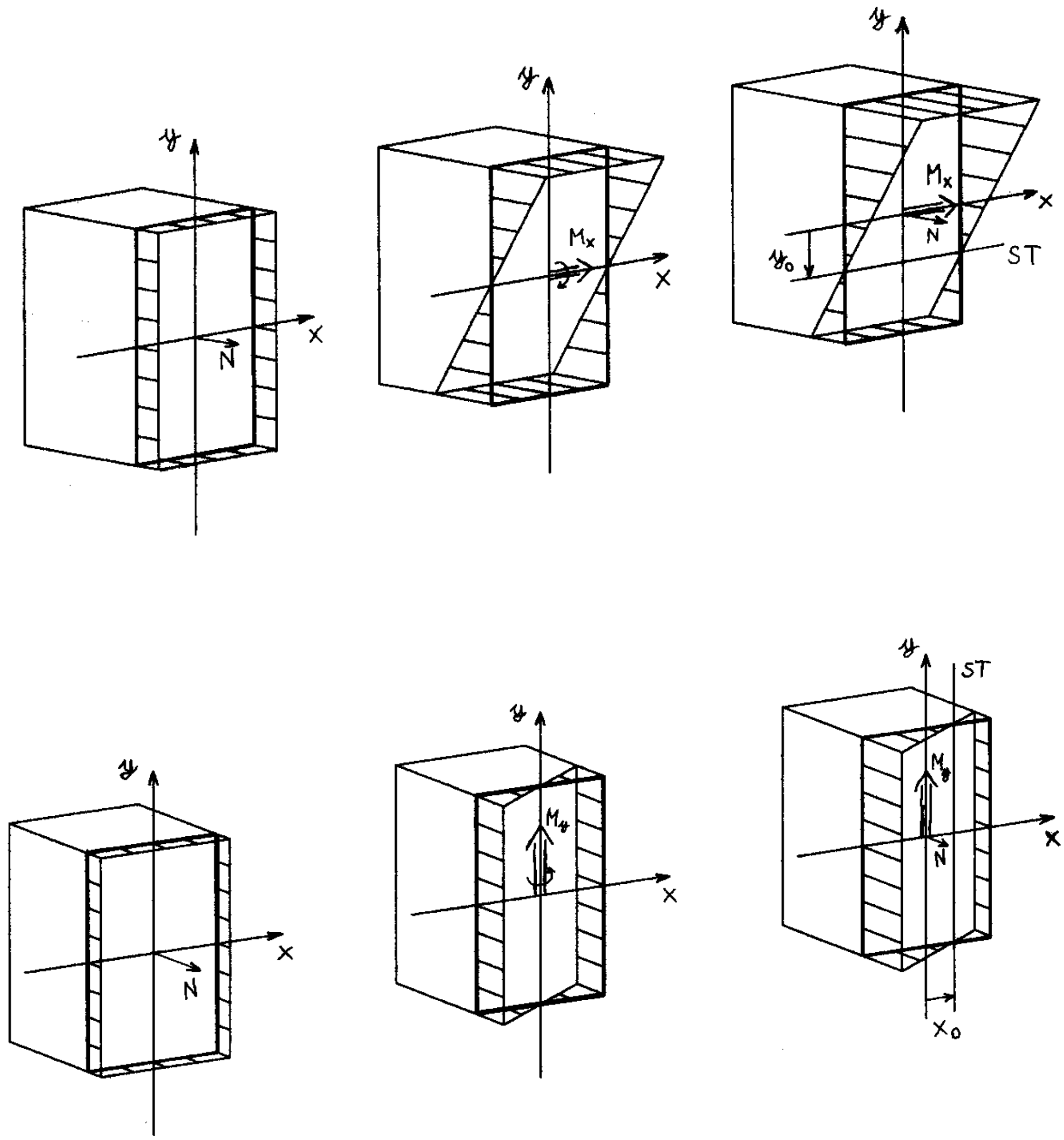
$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y \qquad \sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} x$$





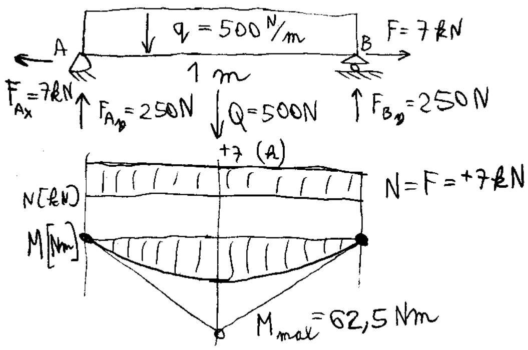
$$\sigma = 0 \rightarrow y_0 = \frac{-N}{A} \frac{I_x}{M_x} \qquad \sigma = 0 \rightarrow x_0 = \frac{N}{A} \frac{I_y}{M_y}$$

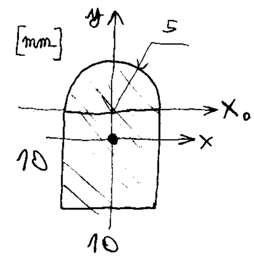
A feszültségeloszlások térbeli ábrázolása:



**7. példa**: Az előadási gyakorlat 1. példájához hasonló feladat.

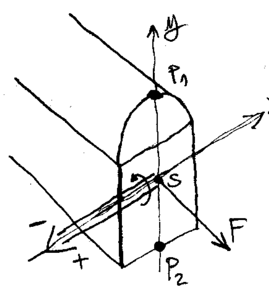
Számítsuk ki a tartó kritikus keresztmetszetében ébredő legnagyobb és legkisebb (előjelesen) feszültség értékét! Ábrázoljuk a feszültségeloszlást és, adjuk meg a semleges tengely helyét!




$$X_s = \frac{-5\cdot 10\cdot 10 + \frac{4}{3}\frac{5}{\pi}\frac{5^2\pi}{2}}{10\cdot 10 + \frac{5^2\pi}{2}} = \frac{-416{,}\overline{6}}{139{,}3} = -3\ mm$$

$$I_{x_s} = \frac{10^3\cdot 10}{3} + \frac{5^4\pi}{8} - 3^2\cdot 139{,}3 = 2325\ mm^4$$




$$\sigma_{húzó} = \frac{N}{A} = \frac{+7000}{139{,}3} = +50{,}25\ MPa$$

$$\sigma_{hajl}^{(P_1)} = \frac{M_x}{I_{x_s}} y_{P_1} = \frac{-62500}{2325}\cdot 8 = -215{,}1\ MPa$$

$$\sigma_{hajl}^{(P_2)} = \frac{M_x}{I_{x_s}} y_{P_2} = \frac{-62500}{2325}(-7) = +188{,}2\ MPa$$

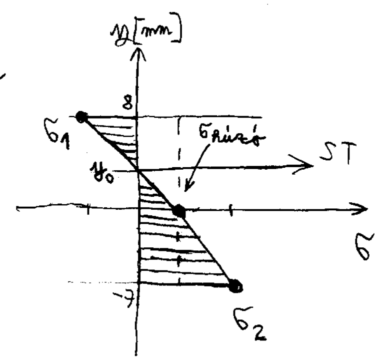
$$M_x = -M_{max} = -62500\ Nmm$$

$$\sigma_1 = \sigma_{húzó} + \sigma_{hajl}^{(P_1)} = +50{,}25 + (-215{,}1) = -164{,}9\ MPa$$

$$\sigma_2 = \sigma_{húzó} - \sigma_{hajl}^{(P_2)} = +50{,}25 + (+188{,}2) = +238{,}5\ MPa$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_{x_s}} y_0 = 0$$

$$y_0 = \frac{-I_{x_s}}{M_x}\frac{N}{A} = \frac{-2325}{-62500}\,50{,}25 = +1{,}869\ mm$$

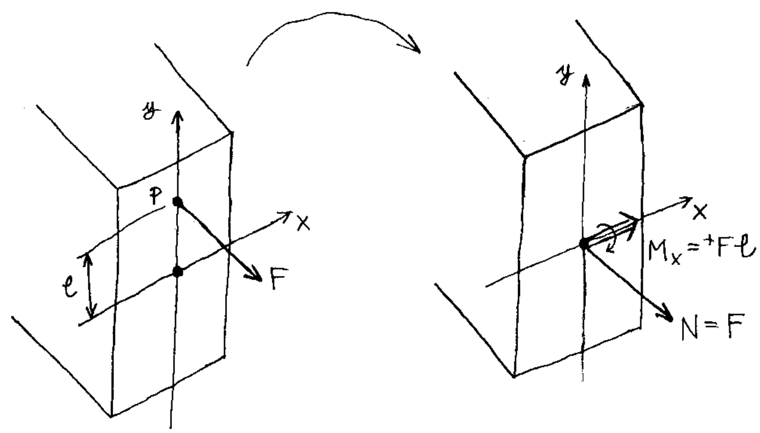


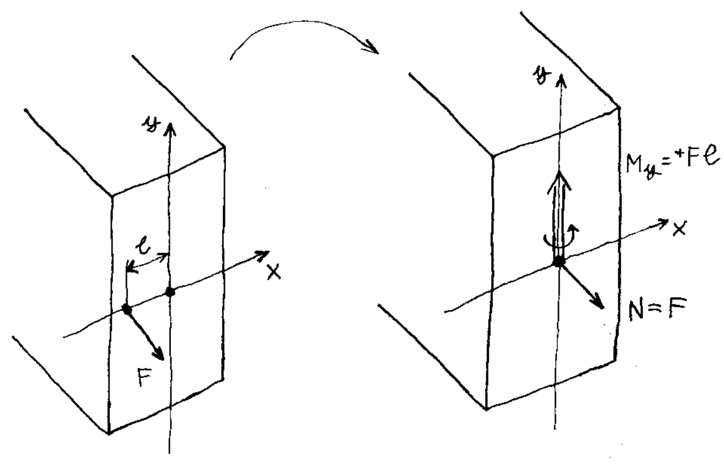

Megjegyzés:
A kritikus keresztmetszet a tartó felénél van, mert a normálerő végig állandó a hajlítónyomaték pedig itt a legnagyobb.
A tartó bal oldalát tartottuk meg. Az alsó húzott szál (a keresztmetszetre berajzolt kunkor) a negatív x tengely irányába mutató $M_x$ nyomatékvektort jelent.

# Külpontos húzás/nyomás

**Elmélet:**

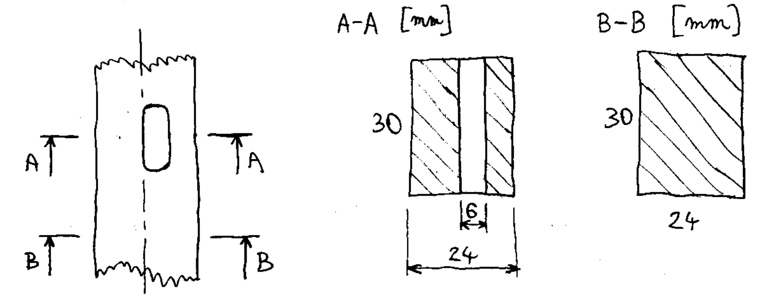
Mivel a húzó/nyomó erő nem a súlypontban hat, hajlítónyomatékot is kifejt. Az erőrendszert át kell redukálni a súlypontba, és onnan a feladat már húzás/nyomás + hajlítás. A nyomatékok előjele az F erő értelmétől (befelé vagy kifelé mutat) és az erő támadáspontjának a súlyponthoz viszonyított eltolódási irányától függően alakul ki.



**8. példa**: Az előadási gyakorlat 2. példájához hasonló feladat.

A változó keresztmetszetű rúd zavartalan B-B keresztmetszetében egyenletes $\sigma_B = 100\ \text{MPa}$ húzófeszültség ébred. Ábrázoljuk a feszültségeloszlást a jellemző értékek kiszámításával a gyengített A-A keresztmetszetben! Adjuk meg a semleges szál helyét!

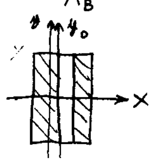



$\sigma_B = {}^{+}100\ \text{MPa}$

$\sigma_A$ fesz.eo. ?

$ST = ?$

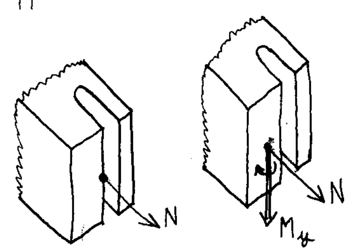
$$\sigma_B = \frac{N}{A_B} \longrightarrow N = \sigma_B A_B = 100 \cdot 24 \cdot 30 = 72000\ \text{N} = 72\ \text{kN}$$




$$x_s = \frac{0-(+3)\cdot 6 \cdot 30}{24 \cdot 30 - 6 \cdot 30} = \frac{-540}{540} = {}^{-}1\ \text{mm}$$

$$I_y = \frac{24^3 \cdot 30}{12} - \frac{6^3 \cdot 30}{3} - 1^2 \cdot 540 = 31\,860\ \text{mm}^4$$

$$M_y = {}^{-}N\,|x_s| = {}^{-}72000 \cdot 1 = {}^{-}72000\ \text{Nmm}$$




$$\sigma(x) = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y}x = \frac{72000}{540} - \frac{{}^{-}72000}{31860}x$$

$$\sigma(x) = 133{,}3 + 2{,}294\,x$$

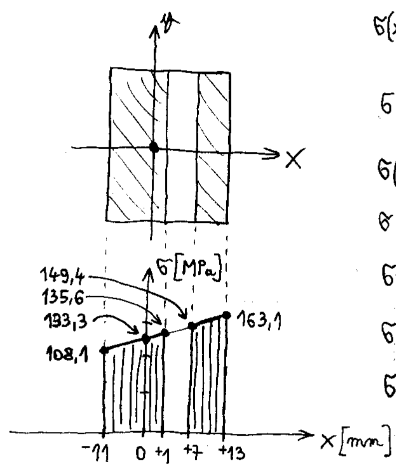
$$\sigma({}^{-}11\ \text{mm}) = 133{,}3 + 2{,}294({}^{-}11) = {}^{+}108{,}1\ \text{MPa}$$

$$\sigma(0) = 133{,}3\ \text{MPa}$$

$$\sigma({}^{+}1\ \text{mm}) = 133{,}3 + 2{,}294({}^{+}1) = {}^{+}135{,}6\ \text{MPa}$$

$$\sigma({}^{+}7\ \text{mm}) = 133{,}3 + 2{,}294({}^{+}7) = {}^{+}149{,}4\ \text{MPa}$$

$$\sigma({}^{+}13\ \text{mm}) = 133{,}3 + 2{,}294({}^{+}13) = {}^{+}163{,}1\ \text{MPa}$$




Megjegyzés:
A kritikus keresztmetszet most nem alkot egybefüggő síkidomot. Ez azonban semmit sem változtat a súlypont és a másodrendű nyomaték számításán.
Semleges szál most olyan értelemben nincs, hogy nincs a keresztmetszetnek olyan pontja, amelyben nulla a feszültség. Ennek oka, hogy a húzásból nagyobb feszültség adódik, mint a hajlításból származó legnagyobb nyomófeszültség. Az elméleti értelemben vett semleges tengely valahol a keresztmetszettől balra van, ahol a feszültségeloszlás ferde egyenese metszené az x tengelyt.