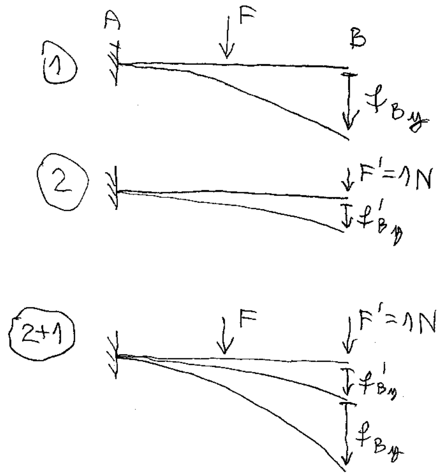
Elméleti összefoglaló:

$f_{By} = ?$



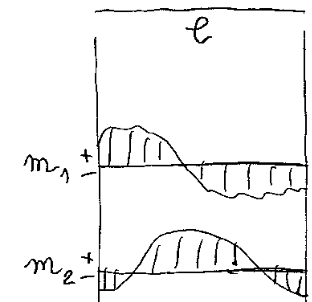
$$M_{21} = F' \cdot f_{By} = \underbrace{\sum_{(i)} \frac{N_i n_i l_i}{A_i E_i}}_{\text{rácsos}} + \underbrace{\int \frac{M_h m_h}{IE} ds}_{\text{síkbeli t.}} + \int \frac{M_{cs} m_{cs}}{I_p G} ds + \underbrace{W_{nyírás}}_{\approx 0}$$

$$\underbrace{\sum_{(i)} \frac{N_i n_i l_i}{A_i E_i} + \int \frac{M_h m_h}{IE} ds}_{\text{síkbeli vegyes}}$$

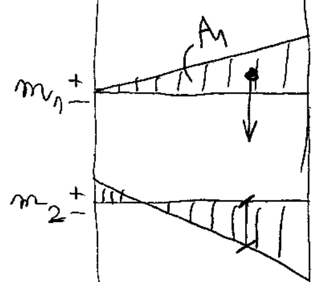
$$\underbrace{\int \frac{M_h m_h}{IE} ds + \int \frac{M_{cs} m_{cs}}{I_p G} ds}_{\text{térbeli t.}}$$

$$\underbrace{\sum_{(i)} \frac{N_i n_i l_i}{A_i E_i} + \int \frac{M_h m_h}{IE} ds + \int \frac{M_{cs} m_{cs}}{I_p G} ds}_{\text{térbeli vegyes}}$$

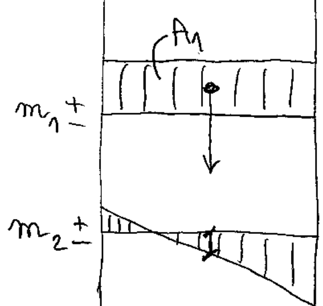
Igénybevételi ábrák szorzatának integrálása:



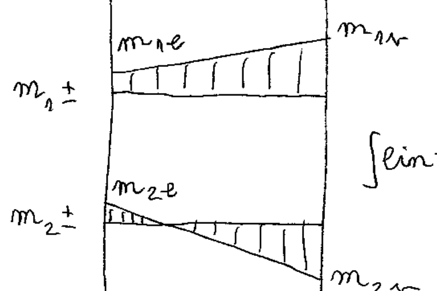
$$\int m_1 m_2\, ds = ?$$



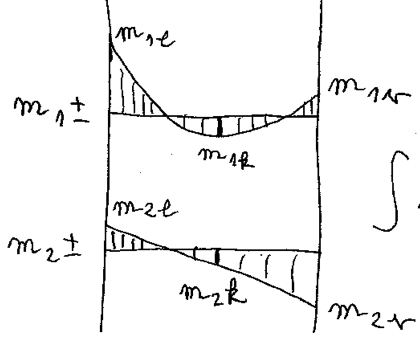
$$\int \triangle \cdot lin\, ds = A_1 \cdot$$



$$\int \square \cdot lin\, ds = A_1 \cdot$$



$$\int lin \cdot lin = \begin{bmatrix} m_{1e} & m_{1v} \end{bmatrix} \frac{\ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{2e} \\ m_{2v} \end{bmatrix}$$



$$\int \triangle \cdot lin = \begin{bmatrix} m_{1e} & m_{1k} & m_{1v} \end{bmatrix} \frac{\ell}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{2e} \\ m_{2k} \\ m_{2v} \end{bmatrix}$$

1. példa: Az előadás 1. feladata.

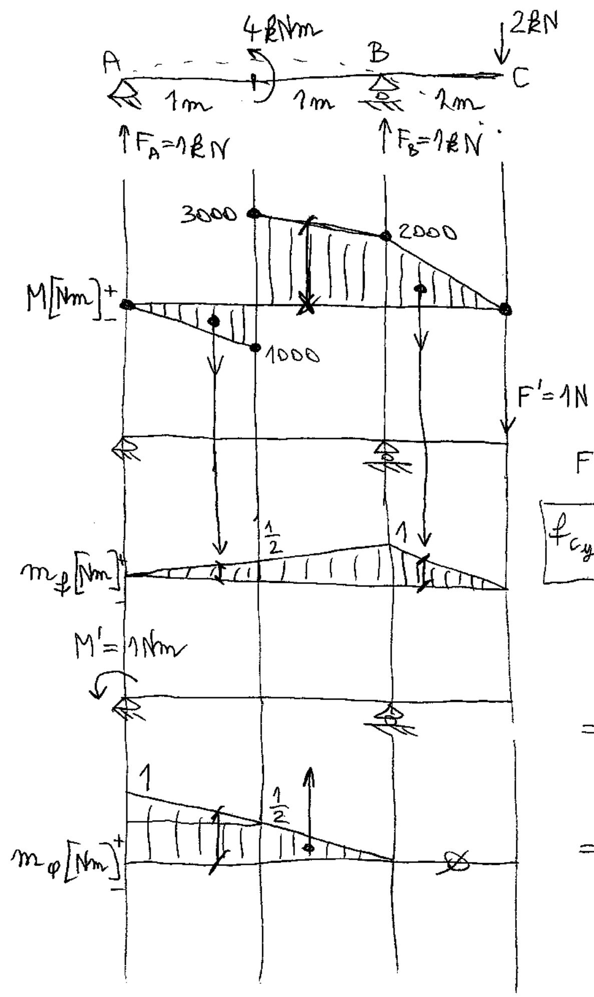
Számítsuk ki a C pont függőleges irányú elmozdulását és az A pont elfordulását! Az alakváltozási munka meghatározásánál csak a hajlítást vegyük figyelembe!

$I = 10^6\ mm^4$

$E = 210\ GPa$

$f_{Cy} = ?$

$\varphi_A = ?$



$$F' \cdot f_{Cy} = \int \frac{M\, m_f}{IE} ds$$

$$\boxed{f_{Cy}} = \frac{1}{F' \cdot IE}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1000\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) + \begin{bmatrix}3000 & 2000\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2000\left(\frac{2}{3}\cdot 1\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{1\cdot 10^{-6}\cdot 210\cdot 10^{9}}\left(-166{,}7 + \begin{bmatrix}500 & 333{,}3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2{,}5\end{bmatrix} + 666{,}7\right) =$$

$$= \frac{1}{2{,}1\cdot 10^{5}}\left(500 + 1833\right) = 1{,}111\cdot 10^{-2}\, m = 11{,}11\ mm\ (\downarrow)$$

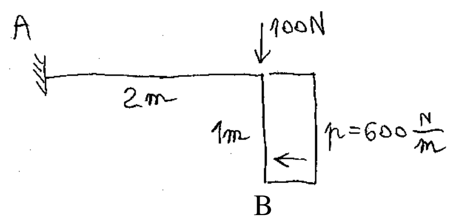
$$M' \varphi_A = \int \frac{M\, m_\varphi}{IE} ds$$

$$\boxed{\varphi_A} = \frac{1}{M' IE}\int M\, m_\varphi\, ds = \frac{1}{1\cdot 10^{-6}\cdot 210\cdot 10^{9}}\left(-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1000\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\left(2000 + \frac{2}{3}\cdot 1000\right)\right) =$$

$$= 1{,}587\cdot 10^{-3}\ rad = 0{,}09095^\circ \circlearrowleft$$

2. példa: Az előadás 2. feladata.

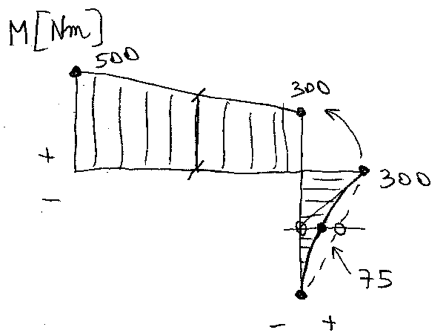
Számítsuk ki a B pont vízszintes irányú elmozdulását! Az alakváltozási munka meghatározásánál csak a hajlítást vegyük figyelembe!

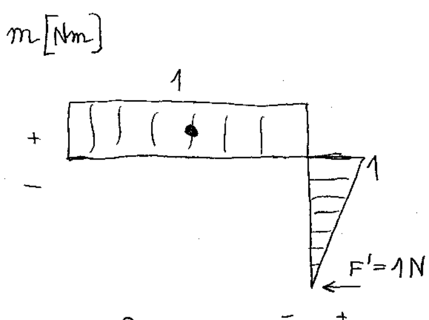


$I = 5 \cdot 10^5\ mm^4$

$E = 210\ GPa$

$f_{Bx} = ?$





$$F' \cdot f_{Bx} = \int \frac{M\,m}{IE}\,ds$$

$$\boxed{f_{Bx}} = \frac{1}{F' \cdot IE} \int M\,m\,ds = \frac{1}{1 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 210 \cdot 10^{9}} \left(+2 \cdot 1 \left(\frac{300+500}{2} \right) + \begin{bmatrix} 300 & 75 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

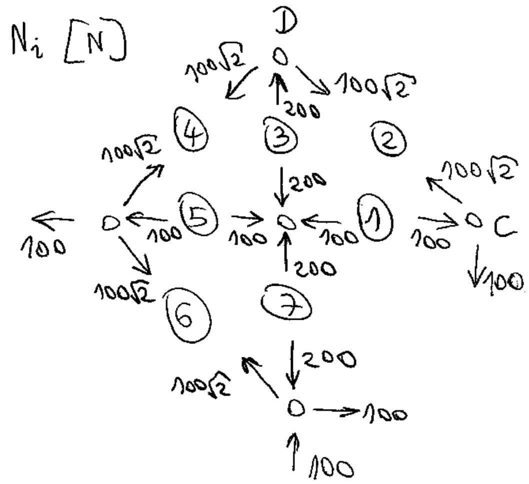
$$= \frac{1}{1{,}05 \cdot 10^{5}} \left(800 + \begin{bmatrix} 50 & 12{,}5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{1{,}05 \cdot 10^{5}} \left(800 + 75 \right) =$$

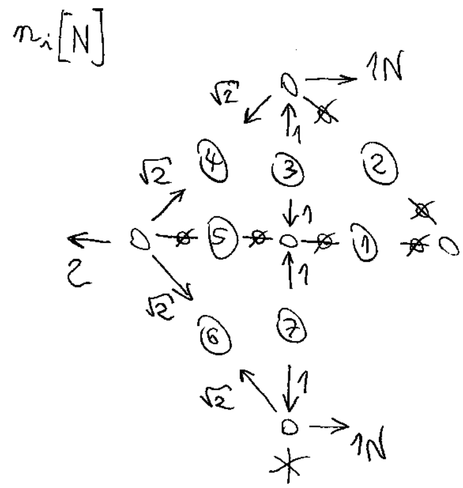
$$= 8{,}333 \cdot 10^{-3}\ m = \boxed{8{,}333\ mm\ (\leftarrow)}$$

3. példa: Az előadás 3. feladata.

Határozzuk meg a D pont vízszintes irányú elmozdulását!

$A = 5\ \text{mm}^2$, $E = 210$ GPa





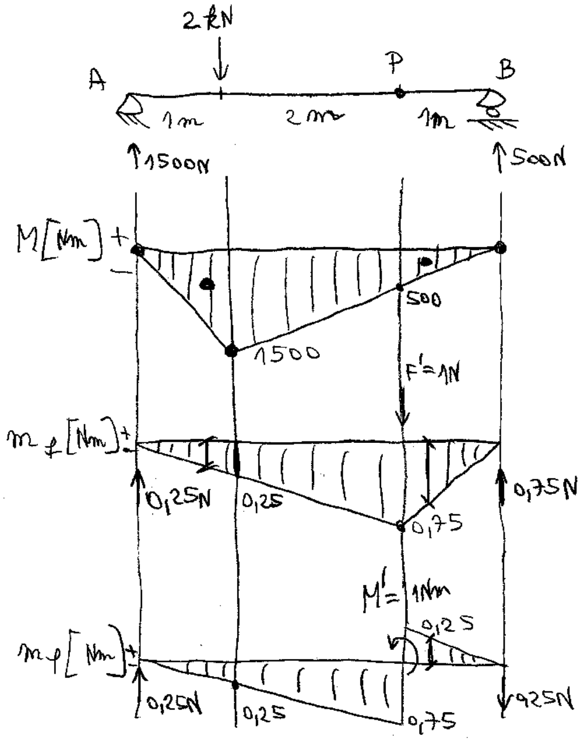
i	l_i [m]	A_i [m²]	E_i [Pa]	N_i [N]	n_i [N]	$N_i n_i l_i$
1	1			−100	0	0
2	$\sqrt{2}$			$+100\sqrt{2}$	0	0
3	1			−200	−1	+200
4	$\sqrt{2}$	$5\cdot10^{-6}$	$2{,}1\cdot10^{11}$	$+100\sqrt{2}$	$+\sqrt{2}$	$+200\sqrt{2}$
5	1			−100	0	0
6	$\sqrt{2}$			$+100\sqrt{2}$	$+\sqrt{2}$	$+200\sqrt{2}$
7	1			−200	−1	+200

$$F' \cdot f_{Dx} = \sum_{i=1}^{7} \frac{N_i n_i l_i}{A_i E_i} =$$

$$\boxed{f_{Dx} = \frac{1}{F' \cdot AE} \sum_{i=1}^{7} N_i n_i l_i = \frac{1 \cdot 200\left(2+2\sqrt{2}\right)}{1 \cdot 5\cdot10^{-6} \cdot 2{,}1\cdot10^{11}} = 9{,}197\cdot10^{-3}\,\text{m} = 9{,}197\ \text{mm}\ (\rightarrow)}$$

4. példa: A gyakorlat 1. feladata.

Határozzuk meg a P pont függőleges elmozdulását és elfordulását! Az alakváltozási munka meghatározásánál csak a hajlítást vegyük figyelembe!



$I = 3\cdot 10^6\ mm^4$

$E = 210\ GPa$

$$\varphi_{Py} = \frac{1}{F'\cdot IE}\int M m_f\, ds = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 10^{-6}\cdot 210\cdot 10^{9}}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1500\left(\frac{2}{3}\cdot 0{,}25\right) + \begin{bmatrix}-1500 & -500\end{bmatrix}\frac{2}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0{,}25\\ -0{,}75\end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 500\left(\frac{2}{3}\cdot 0{,}75\right)\right) = \frac{1}{6{,}3\cdot 10^5}\left(125 + \begin{bmatrix}-500 & -166{,}7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1{,}25\\ -1{,}75\end{bmatrix} + 125\right) =$$

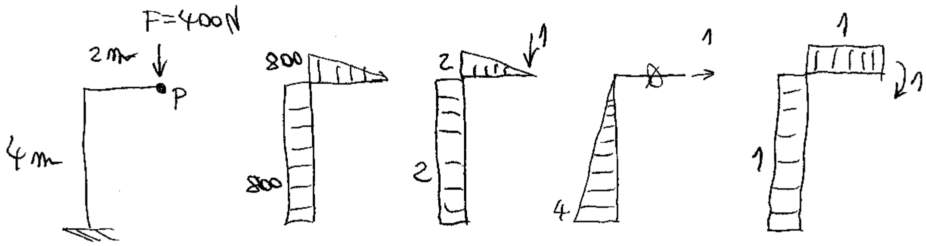
$$= \frac{1}{6{,}3\cdot 10^5}\left(250 + 916{,}7\right) = 1{,}852\cdot 10^{-3}\ m\ (\downarrow)$$

$$\varphi_P = \frac{1}{F'\cdot IE}\int M m_\varphi\, ds = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 10^{-6}\cdot 210\cdot 10^{9}}\left(125 + 916{,}7 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 500\left(\frac{2}{3}\cdot 0{,}25\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{6{,}3\cdot 10^5}\left(125 + 916{,}7 - 41{,}67\right) = 1{,}587\cdot 10^{-3}\ rad = 0{,}0909^\circ\ \circlearrowright$$

5. példa: A gyakorlat 2. feladata.

Határozzuk meg a P pont vízszintes és függőleges elmozdulását, valamint elfordulását! Az alakváltozási munka meghatározásánál csak a hajlítást vegyük figyelembe!



$I = 16\cdot 10^{6}\ mm^{4}$

$E = 210\ GPa$

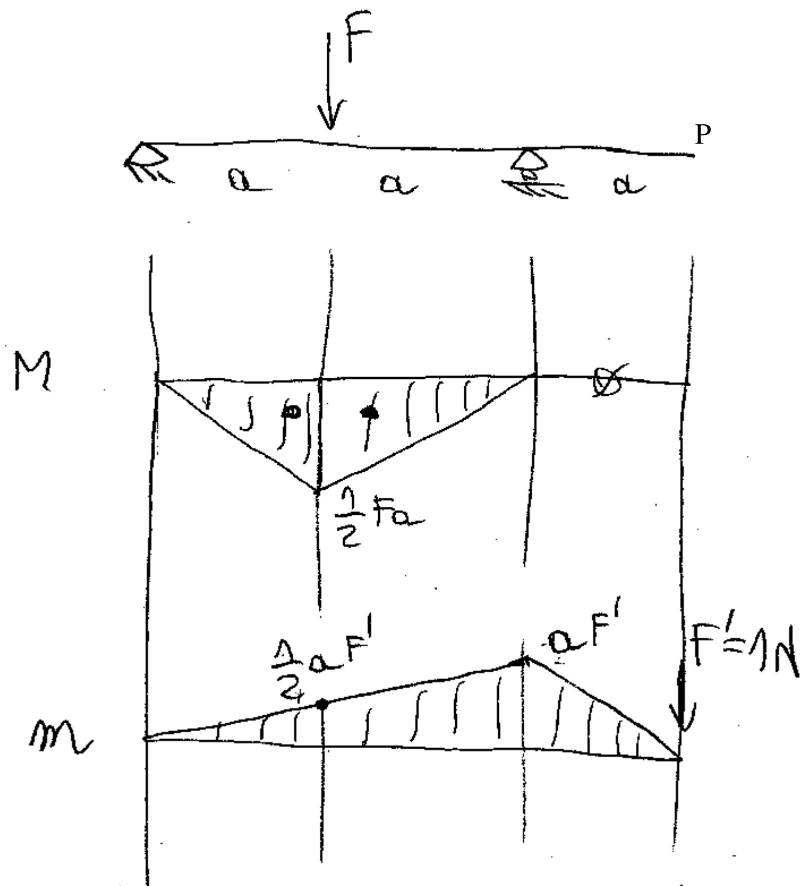
$$f_{xP} = \frac{1}{1\cdot 16\cdot 10^{-6}\cdot 210\cdot 10^{9}}\left(0+4\cdot 800\left(\frac{1}{2}\cdot 4\right)\right) = \frac{1}{3{,}36\cdot 10^{6}}\cdot 6400 = 1{,}905\ m^{-3}\ (\rightarrow)$$

$$f_{yP} = \frac{1}{3{,}36\cdot 10^{6}}\left(\frac{1\cdot 2}{2}\,800\left(\frac{2}{3}\cdot 2\right)+4\cdot 800\,(2)\right) = 2{,}222\cdot 10^{-3}\ m\ (\downarrow)$$

$$\varphi_{P} = \frac{1}{3{,}36\cdot 10^{-6}}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 800\,(1)+4\cdot 800\,(1)\right) = 1{,}190\cdot 10^{-3}\ rad = 0{,}0682^{\circ}\ \circlearrowright$$

6. példa: A gyakorlat 3. feladata.

Határozzuk meg a P pont függőleges elmozdulását! Az alakváltozási munka meghatározásánál csak a hajlítást vegyük figyelembe!

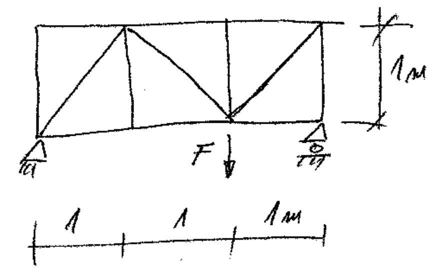


$$f_{P\downarrow}=\frac{1}{1_{F'}\cdot IE}\left(-\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{1}{2}Fa\overbrace{\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)}^{F'a}-\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{1}{2}Fa\overbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)}^{F'a}\right)=$$

$$=\frac{1}{IE}\left(-\frac{1}{12}Fa^3-\frac{1}{6}Fa^3\right)=-\frac{1}{4}\frac{Fa^3}{IE}$$

7. példa: A gyakorlat 4. feladata.

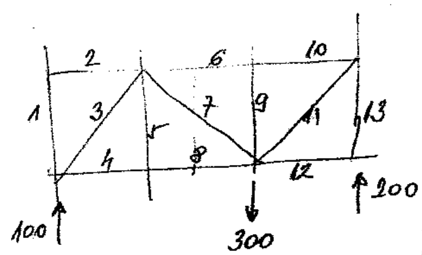
Határozzuk meg az F erő támadáspontjának függőleges irányú elmozdulását!



P

$A = 10\ mm^2 \quad E = 210\ GPa$

$F = 300\ N$

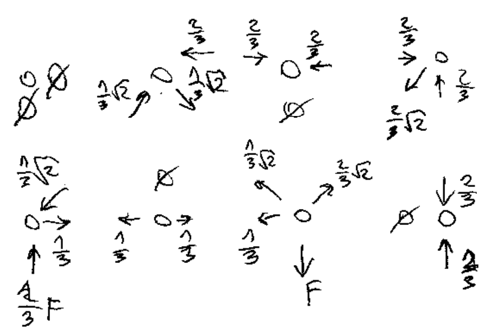


$$f = \sum \frac{N_i \cdot n_i \cdot l_i}{A_i \cdot E_i} = \frac{1}{AE} \sum N_i \cdot n_i \cdot l_i$$

	[m] l_i	[N] N_i	↓1 [N] n_i	[NNm] $N_i n_i l_i$
1	1	∅	∅	φ
2	1	∅	∅	φ
3	$\sqrt{2}$	$-100\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{2}$	$\frac{200}{3}\sqrt{2}$
4	1	+100	$\frac{1}{3}$	$\frac{100}{3}$ ✓
5	1	∅	∅	φ
6	1	-200	$-\frac{2}{3}$	$\frac{400}{3}$ ✓
7	$\sqrt{2}$	$100\sqrt{2}$	$\frac{1}{3}\sqrt{2}$	$\frac{200}{3}\sqrt{2}$
8	1	+100	$\frac{1}{3}$	$\frac{100}{3}$ ✓
9	1	∅	∅	φ
10	1	-200	$-\frac{2}{3}$	$\frac{400}{3}$ ✓
11	$\sqrt{2}$	$200\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$	$\frac{800}{3}\sqrt{2}$
12	1	∅	∅	φ
13	1	-200	$-2/3$	$\frac{400}{3}$ ✓

$$1N \cdot f = \frac{1126{,}63 \cdot 10^3\ N^2 mm}{210\,000 \frac{N}{mm^2} \cdot 10\ mm^2}$$

$$f = 0{,}536\ mm$$



$$\frac{\frac{1400}{3} + \frac{1200}{3}\sqrt{2}}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 210 \cdot 10^{9}} = 4{,}916 \cdot 10^{-4}\ m$$