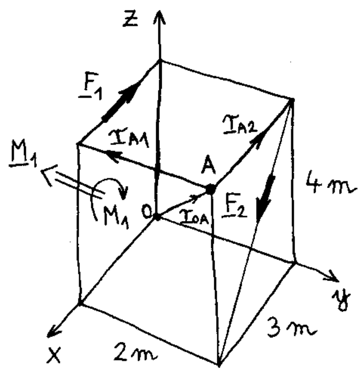
A 2010.02.19.-ei óra 1. példája:

Számítsuk ki az erőrendszer A ponthoz tartozó redukált vektorkettősét! Adjuk meg a centrális egyenes egy pontjának koordinátáit! Írjuk fel a centrális egyenes egyenletét! Számítsuk ki a főerőpár vektorát, és az A ponti redukált nyomaték merőleges komponensét!



$F_1 = F_2 = 100\,\mathrm{N}$

$M_1 = 100\,\mathrm{Nm}$

$[\underline{F}, \underline{M}_A] = ?$

$\underline{r}_P = ?$ ← C.E. egy pontja

$\underline{r}_{CE}(\lambda) = ?$ ← C.E. egyenlete

$\underline{M}_F = ?$ ← főerőpár

$\underline{M}_\perp = ?$ ← merőleges komponens

$$\underline{F}_1 = F_1 \cdot \underline{e}_{F_1} = 100 \cdot (-\underline{i}) = -100\,\underline{i}\ [\mathrm{N}]$$

$$\underline{F}_2 = F_2 \cdot \underline{e}_{F_2} = 100\,\frac{3\underline{i} - 4\underline{k}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 60\,\underline{i} - 80\,\underline{k}\ [\mathrm{N}]$$

$$\underline{M}_1 = M_1 \cdot \underline{e}_{M_1} = 100 \cdot (-\underline{j}) = -100\,\underline{j}\ [\mathrm{Nm}] \leftarrow$$

$$\boxed{\underline{F} = \sum \underline{F}_i = (-100\,\underline{i}) + (60\,\underline{i} - 80\,\underline{k}) = -40\,\underline{i} - 80\,\underline{k}\ [\mathrm{N}]}$$

$$\underline{M}_A = \sum \underline{M}_i + \sum \underline{r}_{Ai} \times \underline{F}_i$$

$$\underline{r}_{A1} = -2\,\underline{j}\ [\mathrm{m}]$$

$$\underline{r}_{A2} = -3\,\underline{i}\ [\mathrm{m}]$$

$$\underline{r}_{A1} \times \underline{F}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & -2 & 0 \\ -100 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0) - \underline{j}(0-0) + \underline{k}(0-200) = -200\,\underline{k}\ [\mathrm{Nm}]$$

$$\underline{r}_{A2} \times \underline{F}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -3 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & -80 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0) - \underline{j}(240-0) + \underline{k}(0-0) = -240\,\underline{j}\ [\mathrm{Nm}]$$

$$\boxed{\underline{M}_A = [-100\,\underline{j}] + [(-200\,\underline{k}) + (-240\,\underline{j})] = -340\,\underline{j} - 200\,\underline{k}\ [\mathrm{Nm}]}$$

$$\underline{r}_P = \underline{r}_{OP} = \underline{r}_{OA} + \underline{r}_{AP}$$

$$\underline{r}_{AP} = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_A}{\underline{F}^2}$$

$$\underline{F} \times \underline{M}_A = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -40 & 0 & -80 \\ 0 & -340 & -200 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-27200) - \underline{j}(8000-0) + \underline{k}(13600-0) =$$
$$= -27200\,\underline{i} - 8000\,\underline{j} + 13600\,\underline{k}$$

$$\underline{F}^2 = 40^2 + 80^2 = 8000$$

$$\underline{r}_{AP} = \frac{-27200\,\underline{i} - 8000\,\underline{j} + 13600\,\underline{k}}{8000} = -3{,}4\,\underline{i} - 1\,\underline{j} + 1{,}7\,\underline{k}\ [m]$$

$$\boxed{\underline{r}_P = (3\,\underline{i} + 2\,\underline{j} + 4\,\underline{k}) + (-3{,}4\,\underline{i} - 1\,\underline{j} + 1{,}7\,\underline{k}) = -0{,}4\,\underline{i} + 1\,\underline{j} + 5{,}7\,\underline{k}\ [m]}$$

$$\boxed{\underline{r}_{CE}(\lambda) = \underline{r}_P + \lambda\,\underline{v}_F = (-0{,}4\,\underline{i} + 1\,\underline{j} + 5{,}7\,\underline{k}) + \lambda(-40\,\underline{i} - 80\,\underline{k})}$$

$$\underline{M}_F = \underline{M}_{\parallel} = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_A}{\underline{F}^2} \cdot \underline{F}$$

$$\underline{F} \cdot \underline{M}_A = (-40\,\underline{i} - 80\,\underline{k}) \cdot (-340\,\underline{j} - 200\,\underline{k}) = 16\,000$$

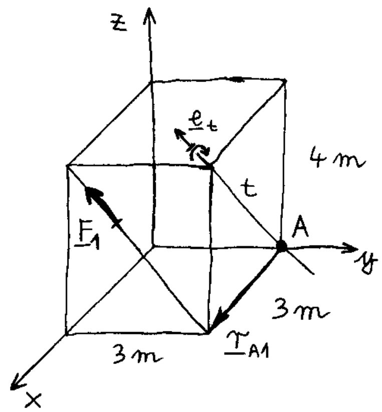
$$\boxed{\underline{M}_F = \frac{16\,000}{8000}(-40\,\underline{i} - 80\,\underline{k}) = -80\,\underline{i} - 160\,\underline{k}\ [Nm]}$$

$$\boxed{\underline{M}_{\perp} = \underline{M} - \underline{M}_{\parallel} = (-340\,\underline{j} - 200\,\underline{k}) - (-80\,\underline{i} - 160\,\underline{k}) = 80\,\underline{i} - 340\,\underline{j} - 40\,\underline{k}\ [Nm]}$$

További feladatok:

1. példa:

Számítsuk ki az erőrendszer nyomatékát a t tengelyre!



$|\underline{F}_1| = 5\ kN$

$M_t = ?$

$$\underline{F}_1 = |\underline{F}_1| \cdot \underline{e}_{F_1} = 5\,\frac{-3\underline{j}+4\underline{k}}{\sqrt{3^2+4^2}} = -3\underline{j}+4\underline{k}\ [kN]$$

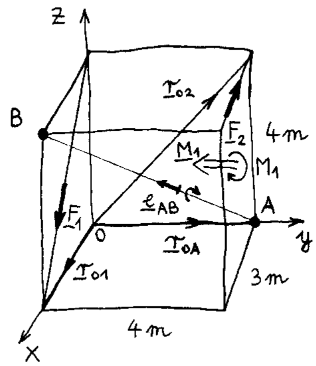
$$\underline{r}_{A1} = 3\underline{i}\ [m]$$

$$\underline{M}_A = \underline{r}_{A1} \times \underline{F}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0) - \underline{j}(12-0) + \underline{k}(-9-0) = -12\underline{j} - 9\underline{k}\ [kNm]$$

$$\boxed{M_t} = \underline{M}_A \cdot \underline{e}_t = (-12\underline{j} - 9\underline{k})\,\frac{3\underline{i}+4\underline{k}}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{0+0-36}{5} = \boxed{-7{,}2\ kNm}$$

Megjegyzés:
A negatív M_t érték arra utal, hogy az erőrendszer nyomatéka a tengelyre az $\mathbf{e}_t$ egységvektor iránya által kijelölt forgásiránnyal ellentétes. Ha az $\mathbf{e}_t$ vektort ellenkező irányúra vettük volna fel, pozitív eredményt kaptunk volna.

2. példa:
Adjuk meg az erőrendszer eredő redukált vektorkettősét az origóra! Számítsuk ki az erőrendszer nyomatékát az AB tengelyre!



$F_1 = 10\ kN$

$F_2 = 4\ kN$

$M_1 = 5\ kNm$

$[\underline{F};\underline{M}_0] = ?$

$M_{AB} = ?$

$$\underline{F}_1 = F_1\,\underline{e}_{F_1} = 10\,\frac{3\underline{i}-4\underline{k}}{\sqrt{3^2+4^2}} = 6\underline{i}-8\underline{k}\ [kN]$$

$$\underline{F}_2 = F_2\,\underline{e}_{F_2} = 4(-\underline{i}) = -4\underline{i}\ [kN]$$

$$\underline{M}_1 = M_1\,\underline{e}_{M_1} = 5(-\underline{j}) = -5\underline{j}\ [kNm] \quad \leftarrow$$

$$\boxed{\underline{F} = \sum \underline{F}_i = (6\underline{i}-8\underline{k})+(-4\underline{i}) = 2\underline{i}-8\underline{k}\ [kN]}$$

$$\underline{M}_0 = \sum \underline{M}_i + \sum \underline{r}_{0i}\times\underline{F}_i$$

$$\underline{r}_{01} = 3\underline{i}\ [m]$$

$$\underline{r}_{02} = 4\underline{j}+4\underline{k}\ [m]$$

$$\underline{r}_{01}\times\underline{F}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -8 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0)-\underline{j}(-24-0)+\underline{k}(0-0) = 24\underline{j}\ [kNm]$$

$$\underline{r}_{02}\times\underline{F}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0)-\underline{j}(0+16)+\underline{k}(0+16) = -16\underline{j}+16\underline{k}\ [kNm]$$

$$\boxed{\underline{M}_0 = [-5\underline{j}]+[(24\underline{j})+(-16\underline{j}+16\underline{k})] = 3\underline{j}+16\underline{k}\ [kNm]}$$

$$\underline{M}_A = \underline{M}_0 - \underline{r}_{0A}\times\underline{F}$$

$$\underline{r}_{0A} = 4\underline{j}\ [m]$$

$$\underline{r}_{0A}\times\underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix} = \underline{i}(-32-0)-\underline{j}(0-0)+\underline{k}(0-8) = -32\underline{i}-8\underline{k}\ [kNm]$$

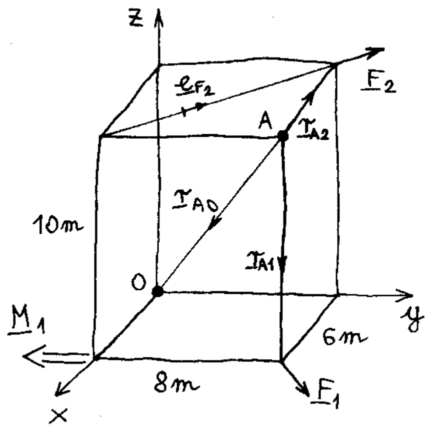
$$\underline{M}_A = (3\underline{j}+16\underline{k})-(-32\underline{i}-8\underline{k}) = 32\underline{i}+3\underline{j}+24\underline{k}\ [kNm]$$

$$\boxed{M_{AB} = \underline{M}_A\cdot\underline{e}_{AB} = (32\underline{i}+3\underline{j}+24\underline{k})\,\frac{3\underline{i}-4\underline{j}+4\underline{k}}{\sqrt{3^2+4^2+4^2}} = \frac{96-12+96}{\sqrt{41}} = 28{,}11\ kNm}$$

Megjegyzés:
Most a tengely egységvektorának irányát nem vehettük fel önkényesen, mert a feladat kiírásban megadták, hogy az AB a pozitív irány.

3. példa:

Redukáljuk az erőrendszert az A pontra! Számítsuk ki az erőrendszer nyomatékát a z tengelyre.



$\underline{F}_1 = 300\,\underline{i} + 400\,\underline{j} - 500\,\underline{k}$ [N]

$|\underline{F}_2| = 500$ N

$|\underline{M}_1| = 700$ Nm

$[\underline{F}, \underline{M}_A] = ?$

$M_z = ?$

$$\underline{F}_2 = |\underline{F}_2|\,\underline{e}_{F2} = 500\,\frac{-6\,\underline{i} + 8\,\underline{j}}{\sqrt{6^2+8^2}} = -300\,\underline{i} + 400\,\underline{j}\ [\mathrm{N}]$$

$$\underline{M}_1 = |\underline{M}_1|\,\underline{e}_{M1} = 700 \cdot (-\underline{j}) = -700\,\underline{j}\ [\mathrm{Nm}]$$

$$\boxed{\underline{F} = \sum \underline{F}_i = (300\,\underline{i} + 400\,\underline{j} - 500\,\underline{k}) + (-300\,\underline{i} + 400\,\underline{j}) = 800\,\underline{j} - 500\,\underline{k}\ [\mathrm{N}]}$$

$$\underline{M}_A = \sum \underline{M}_i + \sum \underline{r}_{Ai} \times \underline{F}_i$$

$$\underline{r}_{A1} = -10\,\underline{k}\ [\mathrm{m}]$$

$$\underline{r}_{A2} = -6\,\underline{i}\ [\mathrm{m}]$$

$$\underline{r}_{A1} \times \underline{F}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & -10 \\ 300 & 400 & -500 \end{vmatrix} = \underline{i}(0+4000) - \underline{j}(0+3000) + \underline{k}(0-0) = 4000\,\underline{i} - 3000\,\underline{j}\ [\mathrm{Nm}]$$

$$\underline{r}_{A2} \times \underline{F}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -6 & 0 & 0 \\ -300 & 400 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0) - \underline{j}(0-0) + \underline{k}(-2400-0) = -2400\,\underline{k}\ [\mathrm{Nm}]$$

$$\boxed{\underline{M}_A = [-700\,\underline{j}] + [(4000\,\underline{i} - 3000\,\underline{j}) + (-2400\,\underline{k})] = 4000\,\underline{i} - 3700\,\underline{j} - 2400\,\underline{k}\ [\mathrm{Nm}]}$$

$$\underline{M}_0 = \underline{M}_A - \underline{r}_{A0} \times \underline{F}$$

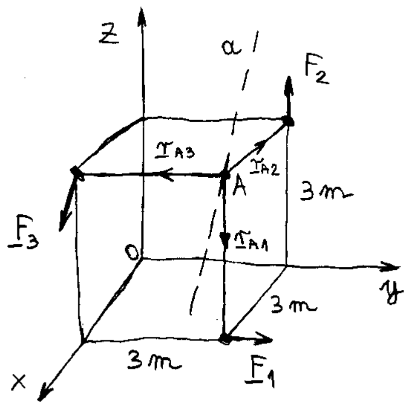
$$\underline{r}_{A0} = -6\,\underline{i} - 8\,\underline{j} - 10\,\underline{k}\ [\mathrm{m}]$$

$$\underline{r}_{A0} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -6 & -8 & -10 \\ 0 & 800 & -500 \end{vmatrix} = \underline{i}(4000+8000) - \underline{j}(3000-0) + \underline{k}(-4800-0) = 12000\,\underline{i} - 3000\,\underline{j} - 4800\,\underline{k}\ [\mathrm{Nm}]$$

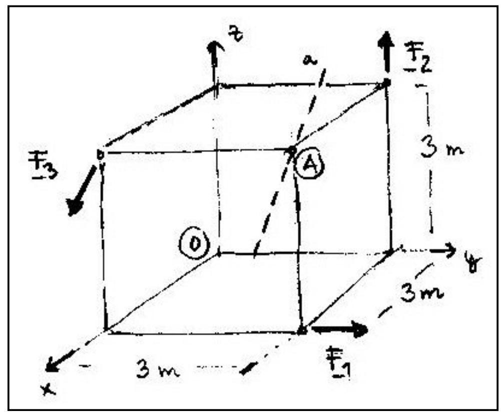
$$\underline{M}_0 = (4000\,\underline{i} - 3700\,\underline{j} - 2400\,\underline{k}) - (12000\,\underline{i} - 3000\,\underline{j} - 4800\,\underline{k}) = -8000\,\underline{i} - 700\,\underline{j} + 2400\,\underline{k}\ [\mathrm{Nm}]$$

$$\boxed{M_z = \underline{M}_0 \cdot \underline{k} = 2400\ \mathrm{Nm}}$$

4. példa:
Számítsuk ki az erőrendszer „a” tengelyre vett nyomatékát!



$$F_1 = 3\,\text{N}$$
$$F_2 = 4\,\text{N}$$
$$\underline{F}_3 = 3\underline{i} - 4\underline{k}\ [\text{N}]$$
$$\underline{a} = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}$$
$$M_a = ?$$



$$\underline{F}_1 = F_1\, \underline{e}_{F_1} = 3\underline{j}\ [\text{N}]$$

$$\underline{F}_2 = F_2\, \underline{e}_{F_2} = 4\underline{k}\ [\text{N}]$$

$$\underline{M}_A = \sum \underline{M}_i + \sum \underline{r}_{Ai} \times \underline{F}_i$$

$$\underline{r}_{A1} = -3\underline{k}\ [\text{m}]$$
$$\underline{r}_{A2} = -3\underline{i}\ [\text{m}]$$
$$\underline{r}_{A3} = -3\underline{j}\ [\text{m}]$$

$$\underline{r}_{A1} \times \underline{F}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}(0+3) - \underline{j}(0-0) + \underline{k}(0-0) = 9\underline{i}\ [\text{Nm}]$$

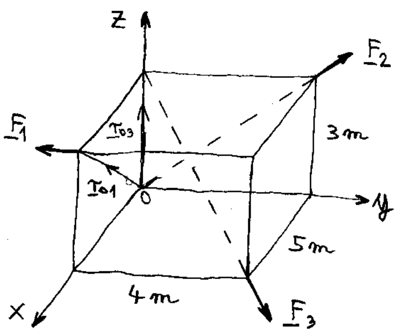
$$\underline{r}_{A2} \times \underline{F}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0) - \underline{j}(-12-0) + \underline{k}(0-0) = 12\underline{j}\ [\text{Nm}]$$

$$\underline{r}_{A3} \times \underline{F}_3 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \underline{i}(12-0) - \underline{j}(0-0) + \underline{k}(0+9) = 12\underline{i} + 9\underline{k}\ [\text{Nm}]$$

$$\underline{M}_A = [\underline{0}] + \left[(9\underline{i}) + (12\underline{j}) + (12\underline{i} + 9\underline{k})\right] = 21\underline{i} + 12\underline{j} + 9\underline{k}\ [\text{Nm}]$$

$$\boxed{M_a} = \underline{M}_A \cdot \underline{e}_a = \underline{M}_A \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = (21\underline{i} + 12\underline{j} + 9\underline{k}) \frac{\underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{21 + 24 + 18}{3} = \boxed{21\ \text{Nm}}$$

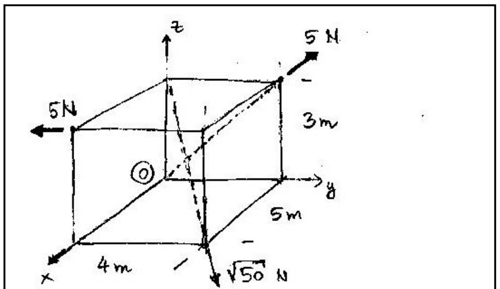
5. példa:
Számítsuk ki az erőrendszer nyomatékát a koordinátatengelyekre! Adjuk meg az O ponti redukált vektorkettőst, és annak legegyszerűbb alakját (a centrális egyenes egy pontja, eredőerő és főerőpár)!



$F_1 = 5\ N$

$F_2 = 5\ N$

$F_3 = \sqrt{50}\ N$



Hat. meg: M_x, M_y, M_z
$\Phi_o\,[\underline{M}_o, \underline{F}]$ vektorkettőst és annak legegyszerűbb alakját!

$$\underline{F}_1 = F_1\,\underline{e}_{F_1} = 5\,(-\underline{j}) = -5\,\underline{j}\ [N]$$

$$\underline{F}_2 = F_2\,\underline{e}_{F_2} = 5\,\frac{4\underline{j}+3\underline{k}}{\sqrt{4^2+3^2}} = 4\underline{j}+3\underline{k}\ [N]$$

$$\underline{F}_3 = F_3\,\underline{e}_{F_3} = \sqrt{50}\,\frac{5\underline{i}+4\underline{j}-3\underline{k}}{\sqrt{5^2+4^2+3^2}} = 5\underline{i}+4\underline{j}-3\underline{k}\ [N]$$

$$\boxed{\underline{F} = \sum \underline{F}_i = (-5\underline{j})+(4\underline{j}+3\underline{k})+(5\underline{i}+4\underline{j}-3\underline{k}) = 5\underline{i}+3\underline{j}\ [N]}$$

$$\underline{M}_o = \sum \underline{M}_i + \sum \underline{r}_{0i}\times\underline{F}_i$$

$$\underline{r}_{01} = 5\underline{i}+3\underline{k}\ [m]$$

$$\underline{r}_{02} = \underline{0}$$

$$\underline{r}_{03} = 3\underline{k}\ [m]$$

$$\underline{r}_{01}\times\underline{F}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}(0+15)-\underline{j}(0-0)+\underline{k}(-25-0) = 15\underline{i}-25\underline{k}\ [Nm]$$

$$\underline{r}_{02}\times\underline{F}_2 = \underline{0}$$

$$\underline{r}_{03}\times\underline{F}_3 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-12)-\underline{j}(0-15)+\underline{k}(0-0) = -12\underline{i}+15\underline{j}\ [Nm]$$

$$\boxed{\underline{M}_o = [\underline{0}]+\left[(15\underline{i}-25\underline{k})+(\underline{0})+(-12\underline{i}+15\underline{j})\right] = 3\underline{i}+15\underline{j}-25\underline{k}\ [Nm]}$$

$$\boxed{M_x = \underline{M}_0 \cdot \underline{i} = 3\ \mathrm{Nm}}$$

$$\boxed{M_y = \underline{M}_0 \cdot \underline{j} = 15\ \mathrm{Nm}}$$

$$\boxed{M_z = \underline{M}_0 \cdot \underline{k} = -25\ \mathrm{Nm}}$$

$$\underline{r}_P = \underline{r}_{OP} = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_0}{\underline{F}^2}$$

$$\underline{F} \times \underline{M}_0 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5 & 3 & 0 \\ 3 & 15 & -25 \end{vmatrix} = \underline{i}(-75-0) - \underline{j}(-125-0) + \underline{k}(75-9) = -75\underline{i} + 125\underline{j} + 66\underline{k}$$

$$\underline{F}^2 = 5^2 + 3^2 + 0^2 = 34$$

$$\boxed{\underline{r}_P = \frac{-75\underline{i} + 125\underline{j} + 66\underline{k}}{34} = -2{,}206\underline{i} + 3{,}676\underline{j} + 1{,}941\underline{k}\ [m]}$$

$$\underline{M}_F = \underline{M}_{\parallel} = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_0}{\underline{F}^2} \cdot \underline{F}$$

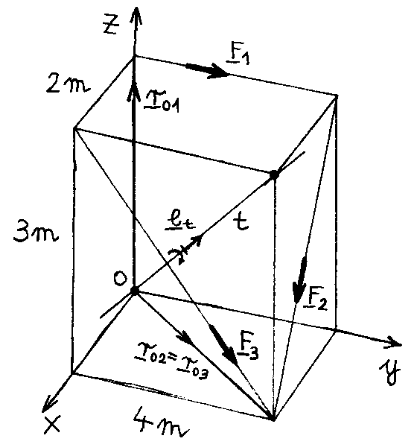
$$\underline{F} \cdot \underline{M}_0 = (5\underline{i} + 3\underline{j})(3\underline{i} + 15\underline{j} - 25\underline{k}) = 15 + 45 = 60$$

$$\boxed{\underline{M}_F = \frac{60}{34}(5\underline{i} + 3\underline{j}) = 8{,}824\underline{i} + 5{,}294\underline{j}\ [\mathrm{Nm}]}$$

$$\phi_P [\underline{F}, \underline{M}_F]$$

6. példa:

Számítsuk ki az erőrendszer O pontra vonatkoztatott eredő redukált vektorkettősét! Mekkora az erőrendszer nyomatéka a t tengelyre? Számítsuk ki a főerőpár vektorát! Adjuk meg a centrális egyenes egy pontjának koordinátáit!



$|\underline{F}_1| = 600\,N$

$\underline{F}_2 = 400\,\underline{i} - 600\,\underline{k}$ [N]

$|\underline{F}_3| = 1000\,N$

$[\underline{F}, \underline{M}_0] = ?$

$M_t = ?$

$\underline{M}_F = ?$

$\underline{r}_P = ?$ (c.-E. egy pontja)

$$\underline{F}_1 = |\underline{F}_1| \cdot \underline{e}_{F_1} = 600 \cdot (+\underline{j}) = 600\,\underline{j} \; [N]$$

$$\underline{F}_3 = |\underline{F}_3| \cdot \underline{e}_{F_3} = 1000\,\frac{4\underline{j} - 3\underline{k}}{\sqrt{4^2+3^2}} = 800\,\underline{j} - 600\,\underline{k} \; [N]$$

$$\boxed{\underline{F} = \sum \underline{F}_i = (600\,\underline{j}) + (400\,\underline{i} - 600\,\underline{k}) + (800\,\underline{j} - 600\,\underline{k}) = 400\,\underline{i} + 1400\,\underline{j} - 1200\,\underline{k}}$$

$$\underline{M}_0 = \sum \underline{M}_i + \sum \underline{r}_{0i} \times \underline{F}_i$$

$$\underline{r}_{01} = 3\,\underline{k} \; [m]$$

$$\underline{r}_{02} = \underline{r}_{03} = 2\,\underline{i} + 4\,\underline{j} \; [m]$$

$$\underline{r}_{01} \times \underline{F}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 600 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-1800) - \underline{j}(0-0) + \underline{k}(0-0) = -1800\,\underline{i} \; [Nm]$$

$$\underline{r}_{02} \times \underline{F}_2 + \underline{r}_{03} \times \underline{F}_3 = \underline{r}_{02} \times (\underline{F}_2 + \underline{F}_3) \quad \leftarrow \underline{r}_{02} = \underline{r}_{03}$$

$$\underline{F}_2 + \underline{F}_3 = (400\,\underline{i} - 600\,\underline{k}) + (800\,\underline{j} - 600\,\underline{k}) = 400\,\underline{i} + 800\,\underline{j} - 1200\,\underline{k} \; [N]$$

$$\underline{r}_{02} \times (\underline{F}_2 + \underline{F}_3) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 400 & 800 & -1200 \end{vmatrix} = \underline{i}(-4800-0) - \underline{j}(-2400-0) + \underline{k}(1600-1600) =$$
$$= -4800\,\underline{i} + 2400\,\underline{j} \; [Nm]$$

$$\boxed{\underline{M}_0 = \underline{0} + \left[(-1800\,\underline{i}) + (-4800\,\underline{i} + 2400\,\underline{j})\right] = -6600\,\underline{i} + 2400\,\underline{j} \; [Nm]}$$

$$\boxed{M_t = \underline{M}_0 \cdot \underline{e}_t = (-6600\,\underline{i} + 2400\,\underline{j})\,\frac{2\,\underline{i} + 4\,\underline{j} + 3\,\underline{k}}{\sqrt{2^2+4^2+3^2}} = \frac{-13200 + 9600 + 0}{\sqrt{29}} = -668{,}5\;Nm}$$

$$\underline{M}_F = \underline{M}_{\parallel} = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_0}{\underline{F}^2} \cdot \underline{F}$$

$$\underline{F} \cdot \underline{M}_0 = \left(400\,\underline{i} + 1400\,\underline{j} - 1200\,\underline{k}\right) \cdot \left(-6600\,\underline{i} + 2400\,\underline{j}\right) =$$

$$= -2{,}64 \cdot 10^6 + 3{,}36 \cdot 10^6 + 0 = 7{,}2 \cdot 10^5$$

$$\underline{F}^2 = 400^2 + 1400^2 + 1200^2 = 3{,}56 \cdot 10^6$$

$$\boxed{\underline{M}_F = \frac{7{,}2 \cdot 10^5}{3{,}56 \cdot 10^6}\left(400\,\underline{i} + 1400\,\underline{j} - 1200\,\underline{k}\right) = 80{,}90\,\underline{i} + 283{,}1\,\underline{j} - 242{,}7\,\underline{k}\ [\mathrm{Nm}]}$$

$$\underline{r}_P = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_0}{\underline{F}^2}$$

$$\underline{F} \times \underline{M}_0 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 400 & 1400 & -1200 \\ -6600 & 2400 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}\left(0 + 2{,}88 \cdot 10^6\right) - \underline{j}\left(0 - 7{,}92 \cdot 10^6\right) + \underline{k}\left(9{,}6 \cdot 10^5 + 9{,}24 \cdot 10^6\right) =$$

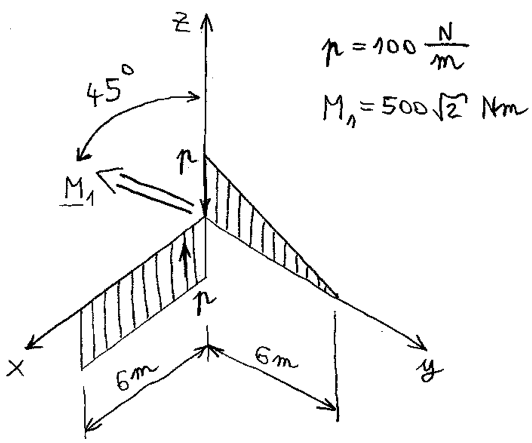
$$= 2{,}88 \cdot 10^6\,\underline{i} + 7{,}92 \cdot 10^6\,\underline{j} + 1{,}02 \cdot 10^7\,\underline{k}\ [\mathrm{Nm}]$$

$$\boxed{\underline{r}_P = \frac{\left(2{,}88\,\underline{i} + 7{,}92\,\underline{j} + 10{,}2\,\underline{k}\right) \cdot 10^6}{3{,}56 \cdot 10^6} = 0{,}8090\,\underline{i} + 2{,}225\,\underline{j} + 2{,}865\,\underline{k}\ [\mathrm{m}]}$$

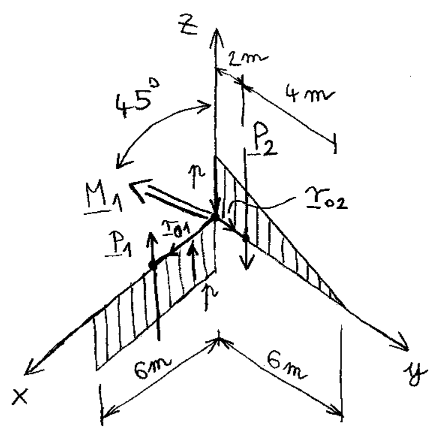
Megjegyzés:
Mivel a 2-es és a 3-as erő hatásvonala metsződik, csak egy helyvektort írtunk fel, és a kettő eredőjével számoltuk a vektoriális szorzatot. Így megspóroltunk egy determinánsos számítást.
Az előbbi trükköt az 1-es és a 2-es erő összevonásával is megtehettük volna, mert azoknak is metsződik a hatásvonaluk.

7. példa: Megoszló erőrendszerek térbeli feladatban.

Számítsuk ki az erőrendszer origóra vonatkoztatott eredő redukált vektorkettősét!



Először a megoszló erőket helyettesítjük az eredőjükkel. Ez után már a szokásos módon számolunk.



$$\underline{P}_1 = P_1 \cdot \underline{e}_{P_1} = P_1 \cdot \underline{k} = (p \cdot \ell_1) \cdot \underline{k} = (100 \cdot 6) \cdot \underline{k} = 600\,\underline{k}\ [N]$$

$$\underline{P}_2 = P_2 \cdot \underline{e}_{P_2} = P_2 \cdot (-\underline{k}) = \left(\frac{1}{2} p\, \ell_2\right) \cdot (-\underline{k}) = \left(\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 6\right) \cdot (-\underline{k}) = -300\,\underline{k}\ [N]$$

$$\underline{M}_1 = M_1 \cdot \underline{e}_{M_1} = 500\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{k}\right) = 500\,\underline{i} + 500\,\underline{k}\ [Nm]$$

$$\boxed{\underline{F} = \sum \underline{F}_i = (600\,\underline{k}) + (-300\,\underline{k}) = 300\,\underline{k}\ [N]}$$

Az origóra redukált nyomaték számítása a definíció szerint, vektoriális szorzatokkal:

$$\underline{M}_o = \sum \underline{M}_i + \sum \underline{r}_{oi} \times \underline{F}_i$$

$$\underline{r}_{o1} = 3\underline{i}\ [m] \qquad \underline{r}_{o2} = 2\underline{j}\ [m]$$

$$\underline{r}_{o1} \times \underline{P}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 600 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0) - \underline{j}(1800-0) + \underline{k}(0-0) = -1800\,\underline{j}\ [Nm]$$

$$\underline{r}_{o2} \times \underline{P}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -300 \end{vmatrix} = \underline{i}(-600-0) - \underline{j}(0-0) + \underline{k}(0-0) = -600\,\underline{i}\ [Nm]$$

$$\boxed{\underline{M}_o = [500\underline{i} + 500\underline{k}] + [(-1800\underline{j}) + (-600\underline{i})] = -100\underline{i} - 1800\underline{j} + 500\underline{k}\ [Nm]}$$

Másik lehetőség: az origóra redukált nyomaték számítása erőkarokkal:

$$M_{ox} = M_{1x} + P_1 \cdot 0 - P_2 \cdot k_2 = +500 + 0 - 300 \cdot 2 = -100\ Nm$$

$$M_{oy} = M_{1y} - P_1 \cdot k_1 + P_2 \cdot 0 = 0 - 600 \cdot 3 + 0 = -1800\ Nm$$

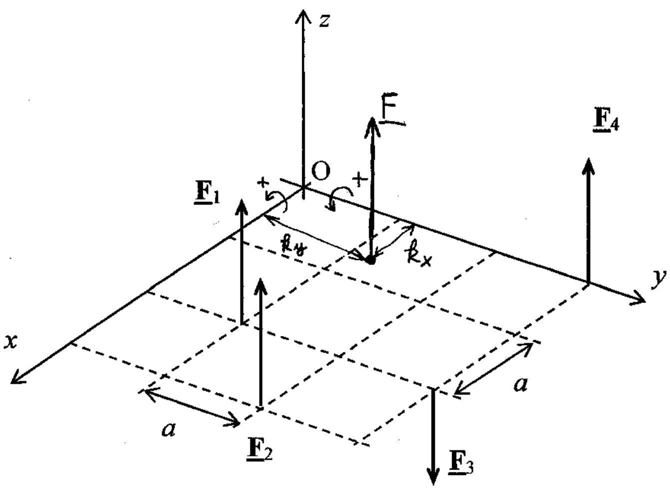
$$M_{oz} = M_{1z} + 0 + 0 = +500 + 0 + 0 = +500\ Nm$$

$$\boxed{\underline{M}_o = M_{ox} \cdot \underline{i} + M_{oy} \cdot \underline{j} + M_{oz} \cdot \underline{k} = -100\underline{i} - 1800\underline{j} + 500\underline{k}\ [Nm]}$$

A munkafüzet 2.9. példája:

2.9. Határozza meg a térbeli, párhuzamos erőrendszer eredőjének nagyságát és a centrális egyenesének egy pontját !

$F_1 = 400\ \text{N}$, $F_2 = 200\ \text{N}$, $F_3 = 500\ \text{N}$, $F_4 = 500\ \text{N}$, $a = 1\ \text{m}$.



$$F_z = \sum F_{iz} = {}^{+}F_1 + F_2 - F_3 + F_4 = {}^{+}400 + 200 - 500 + 500 = {}^{+}600\ \text{N} \longrightarrow \boxed{F = |F_y| = 600\ \text{N}}$$

$$M_x = \sum \pm F_{iz} \cdot k_{iy} = {}^{+}F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a - F_3 \cdot 3a + F_4 \cdot 3a = {}^{+}400 \cdot 1 + 200 \cdot 2 - 500 \cdot 3 + 500 \cdot 3 = {}^{+}800\ \text{Nm}$$

$$|M_x| = F \cdot k_y \rightarrow \boxed{k_y = \frac{|M_x|}{F} = \frac{800}{600} = 1{,}333\ m}$$

$$M_y = \sum \pm F_{iz} \cdot k_{ix} = {}^{-}F_1 \cdot 2a - F_2 \cdot 3a + F_3 \cdot 2a + 0 = {}^{-}400 \cdot 2 - 200 \cdot 3 + 500 \cdot 2 + 0 = {}^{-}400\ \text{Nm}$$

$$|M_y| = F \cdot k_x \rightarrow \boxed{k_x = \frac{|M_y|}{F} = \frac{400}{600} = 0{,}6667\ m}$$

Megjegyzés:

Az eredő helyének meghatározásakor abszolútértékekkel számolunk. Így csak kartávolságokat kapunk. Azt, hogy ez a tengely melyik oldalán értendő, szemlélet alapján döntjük el. Az eredőnek az adott karon azonos előjellel kell előállítania az előzőleg kiszámolt nyomatékot.