

Egy kis elmélet

Az eddigiekben egy \mathbf{F} erő-vektort $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_F$ alakban írtunk fel, ahol F az erő nagysága, \mathbf{e}_F pedig az erő irányába mutató egységvektor volt. Az \mathbf{F} erő azonban felírható $\mathbf{F} = \lambda \mathbf{v}_F$ alakban is, ahol λ skalár, de nem egyenlő az \mathbf{F} erő nagyságával, \mathbf{v}_F pedig az erő irányába mutató vektor, amely nem kell, hogy egységvektor legyen. Ennek a felírásmodnak az előnye, hogy \mathbf{v}_F koordinátái egész számoknak választhatók, míg \mathbf{e}_F koordinátái a normálás miatt általában nem egész számok. A következő példában ez előnyt jelent majd, mert az $\mathbf{F} = \lambda \mathbf{v}_F$ alakú vektorokat olyan egyenletekbe kell beírunk, amelyekben a λ skalárok lesznek az ismeretlenek. A számítást ekkor jelentősen egyszerűsíti, hogy az együtthatók egész számok lesznek.

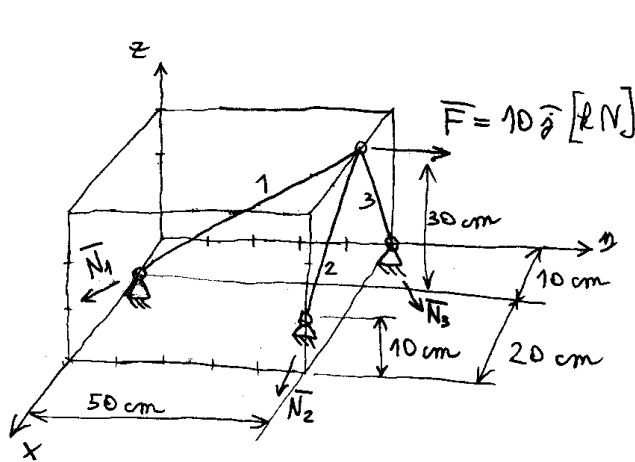
Vigyáznunk kell azonban, hogy ha egy ilyen vektornak a hosszát úgy akarjuk kiszámítani, hogy magát az \mathbf{F} vektort nem számoljuk ki, akkor az $F = \lambda |\mathbf{v}_F|$ képletet kell használnunk. Mivel most nem egységvektort „növesztünk fel” a λ skalárral, hanem egy $|\mathbf{v}_F|$ hosszúságú vektort, ezért a vektor hossza ezen két érték szorzataként adódik.

Vektorok vegyes-szorzata:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

1. példa:

Számítsuk ki a rúderőket! Jelöljük, hogy a rúd húzott vagy nyomott!



$$N_1 = ? \quad \text{h/mg?}$$

$$N_2 = ?$$

$$N_3 = ?$$

$$\vec{N}_1 = N_1 \vec{e}_1 = N_1 \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} = \lambda_1 \vec{r}_1 = \lambda_1 (-5\vec{j} - 3\vec{k})$$

$$N_1 = \lambda_1 |\vec{r}_1|$$

$$\vec{N}_2 = N_2 \vec{e}_2 = N_2 \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} = \lambda_2 \vec{r}_2 = \lambda_2 (2\vec{i} - 2\vec{k})$$

$$N_2 = \lambda_2 |\vec{r}_2|$$

$$\vec{N}_3 = N_3 \vec{e}_3 = N_3 \frac{\vec{r}_3}{|\vec{r}_3|} = \lambda_3 \vec{r}_3 = \lambda_3 (-\vec{i} - 3\vec{k})$$

$$N_3 = \lambda_3 |\vec{r}_3|$$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} = \vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 = 10\vec{j} + \lambda_1(-5\vec{j} - 3\vec{k}) + \lambda_2(2\vec{i} - 2\vec{k}) + \lambda_3(-\vec{i} - 3\vec{k})$$

$$1.) \sum F_x = 0 = 2\lambda_2 - \lambda_3$$

$$2.) \sum F_y = 0 = 10 - 5\lambda_1$$

$$3.) \sum F_z = 0 = -3\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3$$

$$2.) \lambda_1 = 2$$

$$1.) \lambda_3 = 2\lambda_2$$

$$1 \rightarrow 3.) 0 = -3\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3(2\lambda_2)$$

$$0 = -3\lambda_1 - 8\lambda_2$$

$$\lambda_2 = \frac{-3}{8}\lambda_1 = \frac{-3}{8} \cdot 2 = \frac{-3}{4}$$

$$1.) \lambda_3 = 2 \left(\frac{-3}{4} \right) = \frac{-3}{2}$$

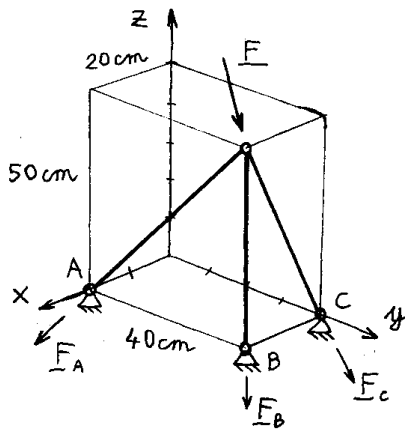
$$\boxed{N_1 = \lambda_1 |\vec{r}_1| = 2 \sqrt{5^2 + 3^2} = +11,66 \text{ kN (h)}}$$

$$\boxed{N_2 = \lambda_2 |\vec{r}_2| = \frac{-3}{4} \sqrt{2^2 + 2^2} = -2,12 \text{ kN (mg)}}$$

$$\boxed{N_3 = \frac{-3}{2} |\vec{r}_3| = \frac{-3}{2} \sqrt{1^2 + 3^2} = -4,74 \text{ kN (mg)}}$$

2. példa:

Számítsuk ki a reakcióerők vektorait!



$$\underline{F} = 3\underline{i} + 6\underline{j} - 4\underline{k} \quad [\text{RN}]$$

$$\underline{F}_A = ?$$

$$\underline{F}_B = ?$$

$$\underline{F}_C = ?$$

$$\underline{F}_A = F_A \underline{e}_{F_A} = F_A \frac{\underline{v}_{F_A}}{|\underline{v}_{F_A}|} = \lambda_A \underline{v}_{F_A} = \lambda_A (-4\underline{j} - 5\underline{k})$$

$$\underline{F}_B = F_B \underline{e}_{F_B} = F_B \frac{\underline{v}_{F_B}}{|\underline{v}_{F_B}|} = \lambda_B \underline{v}_{F_B} = \lambda_B (-\underline{k})$$

$$\underline{F}_C = F_C \underline{e}_{F_C} = F_C \frac{\underline{v}_{F_C}}{|\underline{v}_{F_C}|} = \lambda_C \underline{v}_{F_C} = \lambda_C (-2\underline{i} - 5\underline{k})$$

$$\Sigma \underline{F} = \underline{0} = \underline{F} + \underline{F}_A + \underline{F}_B + \underline{F}_C = (3\underline{i} + 6\underline{j} - 4\underline{k}) + \lambda_A (-4\underline{j} - 5\underline{k}) + \lambda_B (-\underline{k}) + \lambda_C (-2\underline{i} - 5\underline{k})$$

$$1.) \Sigma F_x = 0 = 3 - 2\lambda_C$$

$$2.) \Sigma F_y = 0 = 6 - 4\lambda_A$$

$$3.) \Sigma F_z = 0 = -4 - 5\lambda_A - \lambda_B - 5\lambda_C$$

$$1.) \lambda_C = \frac{3}{2}$$

$$2.) \lambda_A = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$3.) \lambda_B = -4 - 5\lambda_A - 5\lambda_C = -4 - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = -19$$

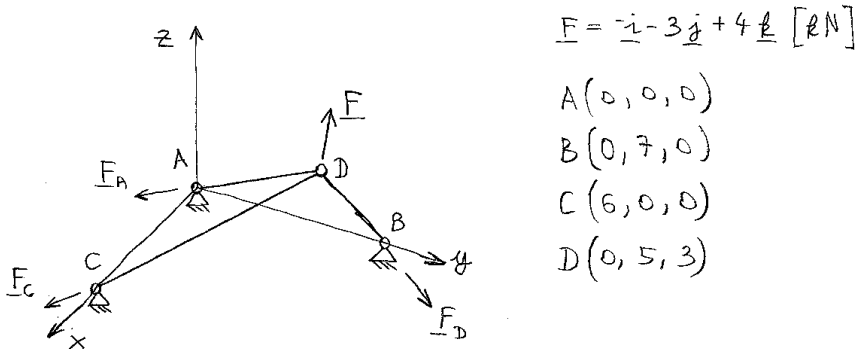
$$\underline{F}_A = \frac{3}{2} (-4\underline{j} - 5\underline{k}) = -6\underline{j} - 7,5\underline{k} \quad [\text{RN}]$$

$$\underline{F}_B = -19(-\underline{k}) = 19\underline{k} \quad [\text{RN}]$$

$$\underline{F}_C = \frac{3}{2} (-2\underline{i} - 5\underline{k}) = -3\underline{i} - 7,5\underline{k} \quad [\text{RN}]$$

3. példa: Számítás vegyes-szorzatokkal.

Számítsuk ki vektoros formában a reakcióerőket!



$$\underline{F}_A = F_A \underline{e}_{F_A} = F_A \frac{\underline{r}_{FA}}{|\underline{r}_{FA}|} = \lambda_A \frac{\underline{r}_{FA}}{|\underline{r}_{FA}|} = \lambda_A \underline{r}_{DA} = \lambda_A (-5\underline{j} - 3\underline{k})$$

$$\underline{F}_B = F_B \underline{e}_{F_B} = F_B \frac{\underline{r}_{FB}}{|\underline{r}_{FB}|} = \lambda_B \frac{\underline{r}_{FB}}{|\underline{r}_{FB}|} = \lambda_B \underline{r}_{DB} = \lambda_B (2\underline{j} - 3\underline{k})$$

$$\underline{F}_C = F_C \underline{e}_{F_C} = F_C \frac{\underline{r}_{FC}}{|\underline{r}_{FC}|} = \lambda_C \frac{\underline{r}_{FC}}{|\underline{r}_{FC}|} = \lambda_C \underline{r}_{DC} = \lambda_C (6\underline{i} - 5\underline{j} - 3\underline{k})$$

$$\lambda_A = \frac{F \underline{r}_B \underline{r}_C}{\underline{r}_A \underline{r}_B \underline{r}_C}$$

$$\underline{F} \underline{r}_B \underline{r}_C = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -1(-6-15) - (-3)(0+18) + 4(0-12) = 21 + 54 - 48 = 27$$

$$\underline{r}_A \underline{r}_B \underline{r}_C = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 0 - (-5)(0+18) + (-3)(0-12) = 0 + 90 + 36 = 126$$

$$\lambda_A = \frac{27}{126} = 0,2143$$

$$\underline{F}_A = \lambda_A \underline{r}_A = 0,2143 (-5\underline{j} - 3\underline{k}) = -1,072\underline{j} - 0,6429\underline{k} \text{ [kN]}$$

$$F_A = \sqrt{1,072^2 + 0,6429^2} = 1,25 \text{ kN}$$

$$\lambda_B = \frac{\underline{v}_A \underline{F} \underline{v}_c}{\underline{v}_A \underline{v}_B \underline{v}_c}$$

$$\underline{v}_A \underline{F} \underline{v}_c = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 6 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 0 - (-5)(3-24) - 3(+5+18) =$$

$$= 0 - 105 - 69 = -174$$

$$\lambda_B = \frac{-174}{126} = -1,381$$

$$\underline{F}_B = \lambda_B \underline{v}_B = -1,381(2\underline{j} - 3\underline{k}) = -2,762\underline{j} + 4,143\underline{k} \text{ [kN]}$$

$$F_B = \sqrt{2,762^2 + 4,143^2} = 4,979 \text{ kN}$$

$$\lambda_c = \frac{\underline{v}_A \underline{v}_B \underline{F}}{\underline{v}_A \underline{v}_B \underline{v}_c}$$

$$\underline{v}_A \underline{v}_B \underline{F} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 - (-5)(0-3) - 3(0+2) =$$

$$= 0 - 15 - 6 = -21$$

$$\lambda_c = \frac{-21}{126} = -0,1667$$

$$\underline{F}_c = \lambda_c \underline{v}_c = -0,1667(6\underline{i} - 5\underline{j} - 3\underline{k}) = -\underline{i} + 0,8335\underline{j} + 0,5\underline{k} \text{ [kN]}$$

$$F_c = \sqrt{1^2 + 0,8335^2 + 0,5^2} = 1,395 \text{ kN}$$

További feladatok a tanszéki honlapon:

http://www.kme.bme.hu/TANTARGY/bsc_mecha_1/Segedlet/bsc_m1_kidolgozott_peldak_terbeli_bakallvany.doc