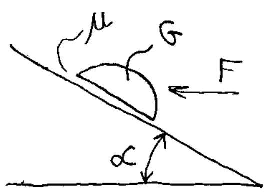
1a. példa: A 2010.04.16.-ai gyakorlat 3a. példájához hasonló feladat.

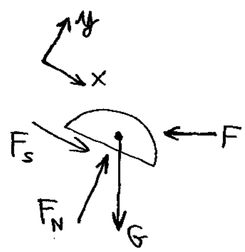
Mekkora F erő hatására mozdul meg éppen felfelé a G súlyú test az α szögű lejtőn?
Mekkora az a lejtőszög, amelynél már tetszőlegesen nagy erővel sem lehet a testet felfelé megmozdítani? (önzárás)



$G = 300\ N$

$\alpha = 30^\circ$

$\mu = 0{,}4$



1.) $\sum F_x = 0 = F_s + G \sin\alpha - F\cos\alpha$

2.) $\sum F_y = 0 = F_N - G\cos\alpha - F\sin\alpha$

3.) $F_s = \mu F_N$

1.) $F_s = F\cos\alpha - G\sin\alpha$

2.) $F_N = F\sin\alpha + G\cos\alpha$

1,2 → 3.) $F\cos\alpha - G\sin\alpha = \mu F\sin\alpha + \mu G\cos\alpha$

$$\boxed{F = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} G} = \frac{\sin 30^\circ + 0{,}4\cos 30^\circ}{\cos 30^\circ - 0{,}4\sin 30^\circ}\cdot 300 = \boxed{381{,}3\ N}$$

$$F = \infty \leftarrow \cos\alpha - \mu\sin\alpha = 0$$

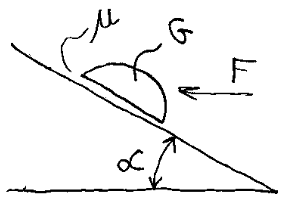
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$$

$$\boxed{\alpha = 68{,}20^\circ}$$

Megjegyzés:
A lejtőhöz igazított koordinátarendszerben számoltunk, mert így az F_N és F_S erők nem szerepelnek együtt az egyensúlyi egyenletekben, és szögfüggvényekkel sincsenek szorozva.

1b. példa: A 2010.04.16.-ai gyakorlat 3b. példájához hasonló feladat.

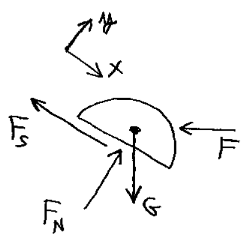
Meddig csökkenhet az F erő értéke, hogy a test még éppen ne mozduljon meg lefelé?



$G = 300\ \text{N}$

$\alpha = 30^\circ$

$\mu = 0{,}4$



1.) $\sum F_x = 0 = -F_s + G \sin\alpha - F\cos\alpha$

2.) $\sum F_y = 0 = F_N - G\cos\alpha - F\sin\alpha$

3.) $F_s = \mu F_N$

1.) $F_s = G\sin\alpha - F\cos\alpha$

2.) $F_N = G\cos\alpha + F\sin\alpha$

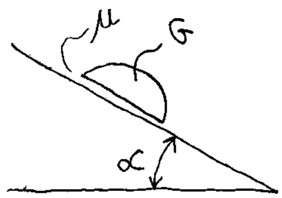
1,2 → 3.) $G\sin\alpha - F\cos\alpha = \mu G\cos\alpha + \mu F\sin\alpha$

$$\boxed{F = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} G} = \frac{\sin 30^\circ - 0{,}4\cos 30^\circ}{\cos 30^\circ + 0{,}4\sin 30^\circ} \cdot 300 = \boxed{43{,}22\ \text{N}}$$

Megjegyzés:
A súrlódási erő most felfelé mutat, mert akadályozni igyekszik a lecsúszást.
A lejtőhöz igazított koordinátarendszerben számoltunk, mert így az F_N és F_S erők nem szerepelnek együtt az egyensúlyi egyenletekben, és szögfüggvényekkel sincsenek szorozva.

1c. példa: A 2010.04.16.-ai gyakorlat 3c. példájához hasonló feladat.

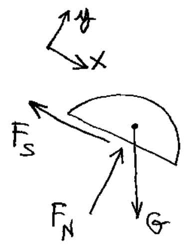
Mekkora az a lejtőszög, amelynél még éppen nem mozdul meg a test?



$G = 300\ N$

$\alpha = 30^\circ$

$\mu = 0{,}4$



1.) $\sum F_x = 0 = -F_S + G \sin\alpha$

2.) $\sum F_y = 0 = F_N - G \cos\alpha$

3.) $F_S = \mu F_N$

1.) $F_S = G \sin\alpha$

2.) $F_N = G \cos\alpha$

1,2 → 3.) $G \sin\alpha = \mu G \cos\alpha$

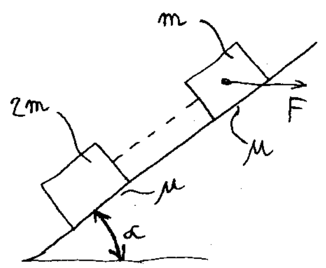
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha = \mu = 0{,}4$$

$$\boxed{\alpha = 21{,}80^\circ}$$

Megjegyzés:
A súrlódási erő felfelé mutat, mert akadályozni igyekszik a lecsúszást.
A lejtőhöz igazított koordinátarendszerben számoltunk, mert így az F_N és F_S erők nem szerepelnek együtt az egyensúlyi egyenletekben, valamint önmagukban állnak, azaz nincsenek szögfüggvényekkel szorozva.

2. példa:

Mekkora F erő esetén indul el felfelé? Mekkora szögnél nem lehet már megmozdítani? (önzárás)



- KF-2 4A M

$\alpha = 30^\circ$

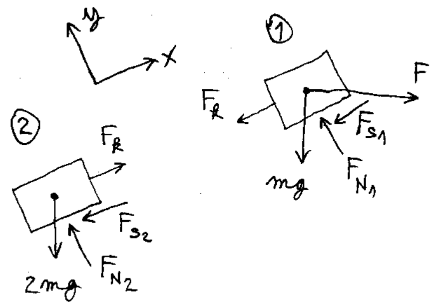
$m = 500\ kg$

$g = 10\ \frac{m}{s^2}$

$\mu = 0,2$

$F = ?$

$\alpha = ?$ (önzárás)



1.) $\sum F_x^{(1)} = 0 = F\cos\alpha - F_k - F_{s1} - mg\sin\alpha$

2.) $\sum F_y^{(1)} = 0 = F_{N1} - F\sin\alpha - mg\cos\alpha$

3.) $F_{s1} = \mu F_{N1}$

4.) $\sum F_x^{(2)} = 0 = F_k - F_{s2} - 2mg\sin\alpha$

5.) $\sum F_y^{(2)} = 0 = F_{N2} - 2mg\cos\alpha$

6.) $F_{s2} = \mu F_{N2}$

5,6 → 4.) $F_k = 2mg\sin\alpha + 2\mu mg\cos\alpha$

2 → 3.) $F_{s1} = \mu F\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$

3,4 → 1.) $0 = F\cos\alpha - 2mg\sin\alpha - 2\mu mg\cos\alpha - \mu F\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha$

$$\boxed{F = 3mg\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}} = 3\cdot 500\cdot 10\,\frac{\sin 30^\circ + 0,2\cos 30^\circ}{\cos 30^\circ - 0,2\sin 30^\circ} =$$

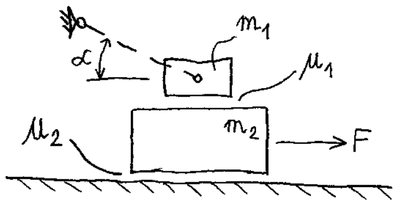
$$= \boxed{13\,182\ N}$$

$F = \infty \Longleftarrow \cos\alpha - \mu\sin\alpha = 0$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0,2} = 5 \longrightarrow \boxed{\alpha = 78,69^\circ}$$

3. példa: A 2010.04.22.-ei gyakorlat 1. példájához (munkafüzet 5.3.) hasonló feladat, csak a rúd helyett kötél van.

Mekkora F erővel lehet az alsó tömeget az elmozdulás határhelyzetébe hozni?

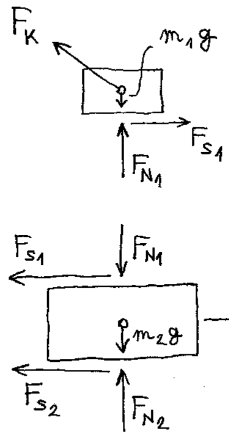


$m_1 = 3\,kg$ $\quad \alpha = 30^\circ$

$m_2 = 5\,kg$ $\quad g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

$\mu_1 = 0{,}7$ $\quad F = ?$

$\mu_2 = 0{,}5$



1.) $\sum F_x^{(1)} = 0 = -F_K \cos\alpha + F_{S_1}$

2.) $\sum F_y^{(1)} = 0 = F_{N_1} - m_1 g + F_K \sin\alpha$

3.) $F_{S_1} = \mu_1 F_{N_1}$

4.) $\sum F_x^{(2)} = 0 = F - F_{S_1} - F_{S_2}$

5.) $\sum F_y^{(2)} = 0 = F_{N_2} - m_2 g - F_{N_1}$

6.) $F_{S_2} = \mu_2 F_{N_2}$

3→1.) $F_K = \dfrac{F_{S_1}}{\cos\alpha} = \dfrac{\mu_1 F_{N_1}}{\cos\alpha}$

2.) $F_K = \dfrac{m_1 g - F_{N_1}}{\sin\alpha}$

1=2.) $\dfrac{\mu_1 F_{N_1}}{\cos\alpha} = \dfrac{m_1 g - F_{N_1}}{\sin\alpha}$

$\mu_1 F_{N_1} \sin\alpha = m_1 g \cos\alpha - F_{N_1} \cos\alpha$

$F_{N_1} = \dfrac{m_1 g \cos\alpha}{\mu_1 \sin\alpha + \cos\alpha} = \dfrac{3 \cdot 9{,}81 \cos 30^\circ}{0{,}7 \cdot \sin 30^\circ + \cos 30^\circ} = 20{,}96\ N$

3.) $F_{S_1} = \mu_1 F_{N_1} = 0{,}7 \cdot 20{,}96 = 14{,}67\ N$

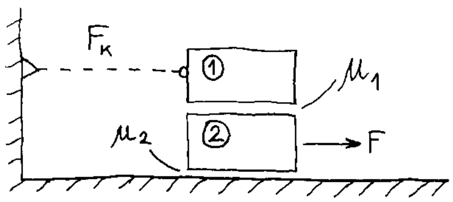
5.) $F_{N_2} = m_2 g + F_{N_1} = 5 \cdot 9{,}81 + 20{,}96 = 70{,}01\ N$

6.) $F_{S_2} = \mu_2 F_{N_2} = 0{,}5 \cdot 70{,}01 = 35{,}01\ N$

4.) $\boxed{F = F_{S_1} + F_{S_2} = 14{,}67 + 35{,}01 = 49{,}68\ N}$

4. példa: Az előzőhöz hasonló példa, csak most vízszintes a kötél.

Mekkora F erővel lehet az alsó tömeget az elmozdulás határhelyzetébe hozni? Mekkora az ehhez tartozó kötélerő?



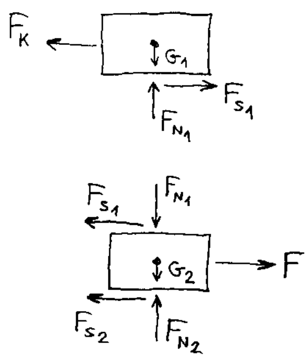
$G_1 = G_2 = 25\,N$

$\mu_1 = 0{,}4$

$\mu_2 = 0{,}3$

$F = ?$

$F_K = ?$



1.) $\sum F_x^{(1)} = 0 = F_{s_1} - F_K$

2.) $\sum F_y^{(1)} = 0 = F_{N_1} - G_1$

3.) $F_{s_1} = \mu_1 F_{N_1}$

4.) $\sum F_x^{(2)} = 0 = F - F_{s_1} - F_{s_2}$

5.) $\sum F_y^{(2)} = 0 = F_{N_2} - G_2 - F_{N_1}$

6.) $F_{s_2} = \mu F_{N_2}$

2.) $F_{N_1} = G_1 = 25\,N$

3.) $F_{s_1} = \mu_1 F_{N_1} = 0{,}4 \cdot 25 = 10\,N$

1.) $\boxed{F_K = F_{s_1} = 10\,N}$

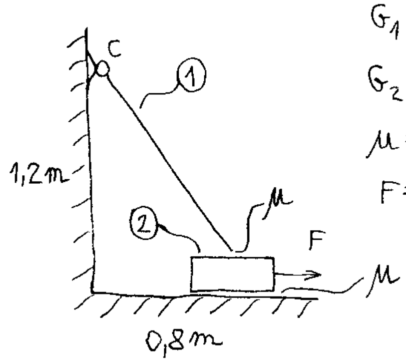
5.) $F_{N_2} = G_2 + F_{N_1} = 25 + 25 = 50\,N$

6.) $F_{s_2} = \mu_2 F_{N_2} = 0{,}3 \cdot 50 = 15\,N$

4.) $\boxed{F = F_{s_1} + F_{s_2} = 10 + 15 = 25\,N}$

5. példa:

Mekkora erővel lehet a hasábot megmozdítani?

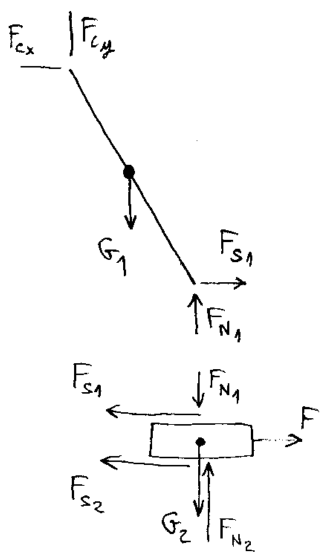


$G_1 = 450\,N$

$G_2 = 60\,N$

$\mu = \frac{1}{3}$

$F = ?$



1.) $\sum M_c^{(1)} = 0 = F_{N1} \cdot 0{,}8 + F_{s1} \cdot 1{,}2 - G_1 \cdot 0{,}4$

2.) $F_{s1} = \mu F_{N1}$

3.) $\sum F_x^{(2)} = 0 = F - F_{s1} - F_{s2}$

4.) $\sum F_y^{(2)} = 0 = F_{N2} - F_{N1} - G_2$

5.) $F_{s2} = \mu F_{N2}$

2→1.) $0 = 0{,}8 F_{N1} + 1{,}2 \mu F_{N1} - 0{,}4\, G_1$

$$F_{N1} = \frac{0{,}4 G_1}{0{,}8 + 1{,}2\mu} = \frac{0{,}4 \cdot 450}{0{,}8 + 1{,}2 \cdot \frac{1}{3}} = 150\,N$$

2.) $F_{s1} = \mu F_{N1} = \frac{1}{3} \cdot 150 = 50\,N$

4.) $F_{N2} = G_2 + F_{N1} = 60 + 150 = 210\,N$

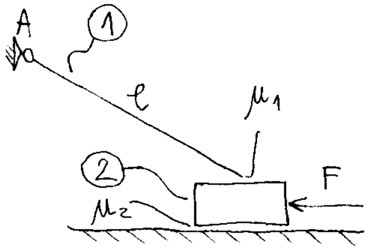
4→5.) $F_{s2} = \frac{1}{3} \cdot 210 = 70\,N$

2,5→3.) $\boxed{F = F_{s1} + F_{s2} = 50 + 70 = 120\,N}$

6. példa:

Mekkora erővel lehet a hasábot az elmozdulás határhelyzetébe hozni?
Mekkora szögnél válik az elrendezés önzáróvá?

2002.06.06. 4B M

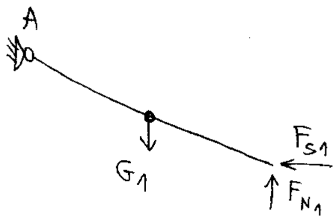


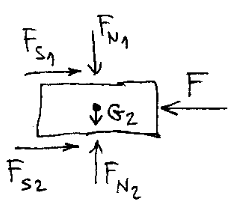
$G_1 = 400\,N$ $\quad \mu_1 = 0{,}3$

$G_2 = 600\,N$ $\quad \mu_2 = 0{,}2$

$l = 0{,}8\,m$ $\quad F = ?$

$\alpha = 30^\circ$ $\quad \alpha = ?$ (önzárás)





1.) $\sum M_A^{(1)} = 0 = -G_1 \frac{l}{2}\cos\alpha + F_{N_1} l \cos\alpha - F_{S_1} l \sin\alpha$

2.) $F_{S_1} = \mu_1 F_{N_1}$

3.) $\sum F_x^{(2)} = 0 = F_{S_1} + F_{S_2} - F$

4.) $\sum F_y^{(2)} = 0 = F_{N_2} - F_{N_1} - G_2$

5.) $F_{S_2} = \mu_2 F_{N_2}$

2→1.) $F_{N_1} = \dfrac{G_1 \frac{l}{2}\cos\alpha}{l\cos\alpha - \mu_1 l \sin\alpha} = \dfrac{G_1}{2(1-\mu_1 \operatorname{tg}\alpha)}$

4.) $F_{N_2} = F_{N_1} + G_2$

4,5→3.) $F = F_{S_1} + F_{S_2} = \mu_1 F_{N_1} + \mu_2 F_{N_2} = \mu_1 F_{N_1} + \mu_2 (F_{N_1} + G_2) = (\mu_1 + \mu_2) F_{N_1} + \mu_2 G_2$

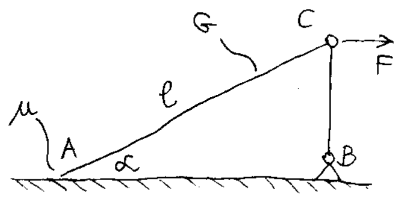
$$\boxed{F} = (\mu_1+\mu_2)\frac{G_1}{2(1-\mu_1 \operatorname{tg}\alpha)} + \mu_2 G_2 = (0{,}3+0{,}2)\frac{400}{2(1-0{,}3\operatorname{tg}30^\circ)} + 0{,}2\cdot 600 = \boxed{241\,N}$$

$F = \infty \longleftarrow 1 - 0{,}3 \operatorname{tg}\alpha = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{0{,}3} \longrightarrow \boxed{\alpha = 73{,}3^\circ}$

7. példa:

Mekkora erővel lehet a szerkezetet az elmozdulás határhelyzetébe hozni?



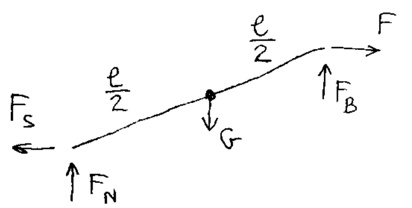
$\alpha = 30^\circ$

$\mu = 0{,}3$

$G = 500\,N$

$F = ?$

$F_B = ?$



1.) $\sum M_C = 0 = G\frac{\ell}{2}\cos\alpha - F_N \ell\cos\alpha - F_s\,\ell\sin\alpha$

2.) $\sum F_x = 0 = F - F_s$

3.) $\sum F_y = 0 = F_N + F_B - G$

4.) $F_s = \mu F_N$

---

4 → 1.) $0 = \frac{1}{2}G\cos\alpha - F_N\cos\alpha - \mu F_N \sin\alpha$

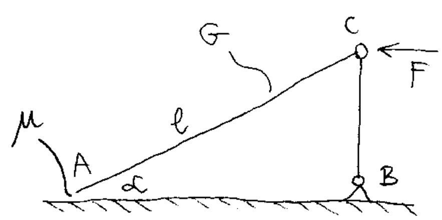
$$F_N = \frac{G\cos\alpha}{2(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} = \frac{500\cos 30^\circ}{2(\cos 30^\circ + 0{,}3\sin 30^\circ)} = 213{,}1\,N$$

3.) $\boxed{F_B = G - F_N = 500 - 213{,}1 = 286{,}9\,N\ (\uparrow)}$

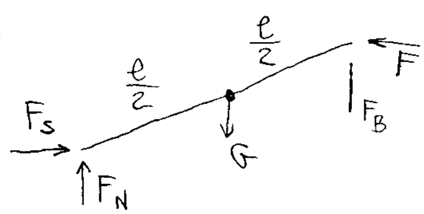
4 → 2.) $\boxed{F = F_s = \mu F_N = 0{,}3 \cdot 213{,}1 = 64{,}0\,N}$

8. példa:

Mekkora erővel lehet a szerkezetet az elmozdulás határhelyzetébe hozni?
Mekkora szögnél válik a szerkezet önzáróvá?



$\alpha = 30^\circ$
$\mu = 0,3$
$G = 500\ N$
$F = ?$
$\alpha = ?$ (önzárás)



1.) $\sum M_C = 0 = G \frac{\ell}{2} \cos\alpha - F_N \ell \cos\alpha + F_S \ell \sin\alpha$

2.) $\sum F_x = 0 = F_S - F$

3.) $F_S = \mu F_N$

2.) $F = F_S$

3.) $F_N = \frac{F_S}{\mu} = \frac{F}{\mu}$

$2,3 \rightarrow 1.)\quad 0 = \frac{1}{2} G \cos\alpha - \frac{F}{\mu} \cos\alpha + F \sin\alpha$

$$\boxed{F = \frac{\mu G \cos\alpha}{2(\cos\alpha - \mu \sin\alpha)}} = \frac{0,3 \cdot 500 \cdot \cos 30^\circ}{2(\cos 30^\circ - 0,3 \sin 30^\circ)} = \boxed{90,7\ N}$$

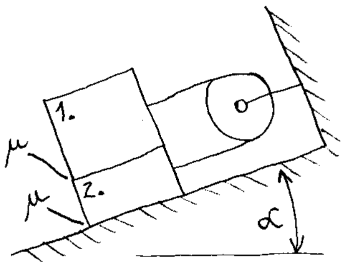
$$F = \infty \Longleftarrow \cos\alpha - \mu \sin\alpha = 0$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0,3}$$

$$\boxed{\alpha = 73,30^\circ}$$

9. példa: Mekkora lejtőszögnél mozdulnak meg a tömegek?

2000.06.06. 4B M

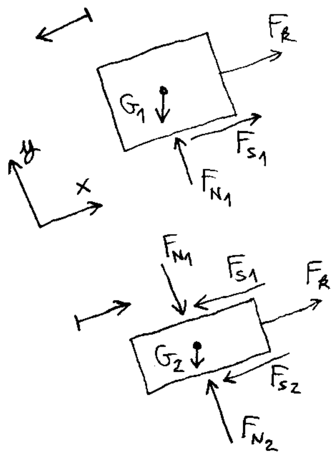


$\mu = 0{,}15$

$G_1 = 20\,N$

$G_2 = 10\,N$

$\alpha = ?$



1.) $\sum F_x^{(1)} = 0 = F_{S_1} + F_k - G_1 \sin\alpha$

2.) $\sum F_y^{(1)} = 0 = F_{N_1} - G_1 \cos\alpha$

3.) $F_{S_1} = \mu F_{N_1}$

4.) $\sum F_x^{(2)} = 0 = F_k - F_{S_1} - F_{S_2} - G_2 \sin\alpha$

5.) $\sum F_y^{(2)} = 0 = F_{N_2} - F_{N_1} - G_2 \cos\alpha$

6.) $F_{S_2} = \mu F_{N_2}$

2.) $F_{N_1} = G_1 \cos\alpha$

2→3.) $F_{S_1} = \mu G_1 \cos\alpha$

3→1.) $F_k = G_1 \sin\alpha - \mu G_1 \cos\alpha$

2→5.) $F_{N_2} = G_2 \cos\alpha + G_1 \cos\alpha$

5→6.) $F_{S_2} = \mu G_2 \cos\alpha + \mu G_1 \cos\alpha$

1,3,6→4.) $0 = (G_1 \sin\alpha - \mu G_1 \cos\alpha) - (\mu G_1 \cos\alpha) - (\mu G_2 \cos\alpha + \mu G_1 \cos\alpha) - G_2 \sin\alpha$

$$0 = (G_1 - G_2)\sin\alpha - (3\mu G_1 + \mu G_2)\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mu \frac{3G_1 + G_2}{G_1 - G_2} = 0{,}15\,\frac{3\cdot 20 + 10}{20 - 10} = 1{,}05$$

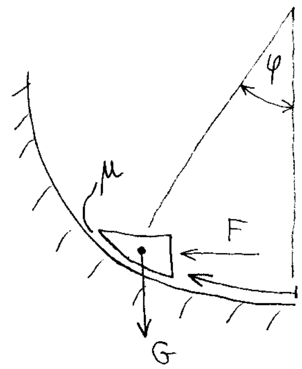
$$\boxed{\alpha = 46{,}40^\circ}$$

Megjegyzés:
A lejtővel párhuzamos koordinátarendszerben számoltunk, mert így csak a súlyerőket kellett komponensekre bontani, minden más erő a koordinátatengelyekkel párhuzamos volt.

10. példa: Ez már emelt szintű (szupergenyó) feladat, de azért érdemes megnézni.

Meddig tolható fel a vízszintes F=10 N erővel a test az íves pályán?

1998.06.16. 4A Ø

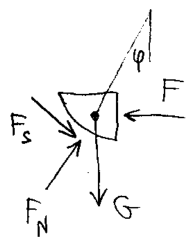


$\mu = 0{,}3$

$\varphi = ?$ (ahol megáll)

$F = 10\,N$

$G = 4\,N$



1.) $\sum F_x = 0 = F_N \sin\varphi + F_s \cos\varphi - F$

2.) $\sum F_y = 0 = F_N \cos\varphi - F_s \sin\varphi - G$

3.) $F_s = \mu F_N$

3→1.) $0 = F_N \sin\varphi + \mu F_N \cos\varphi - F$

$$F_N = \frac{F}{\sin\varphi + \mu \cos\varphi}$$

3→2.) $0 = F_N \cos\varphi - \mu F_N \sin\varphi - G$

$$F_N = \frac{G}{\cos\varphi - \mu \sin\varphi}$$

1.=2.) $F(\cos\varphi - \mu \sin\varphi) = G(\sin\varphi + \mu \cos\varphi)$

$$F(1 - \mu\, tg\varphi) = G(tg\varphi + \mu)$$

$$tg\varphi = \frac{F - \mu G}{G + \mu F} = \frac{10 - 0{,}3 \cdot 4}{4 + 0{,}3 \cdot 10} = 1{,}257$$

$$\boxed{\varphi = 51{,}50^\circ}$$

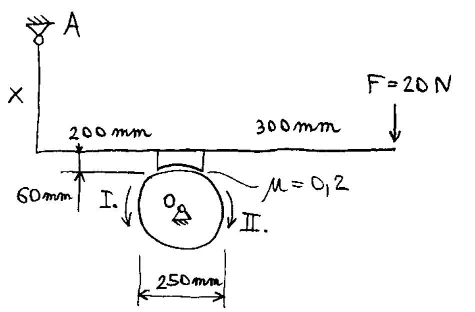
11. példa: A 2010.04.23.-ai. gyakorlat 1. példájához hasonló feladat.

Az I.-es forgásirány esetén mekkora x méret esetén lesz a szerkezet önzáró?
Ilyen méret esetén mekkora M nyomatékkal lehet a korongot megmozdítani a II.-es irányban?

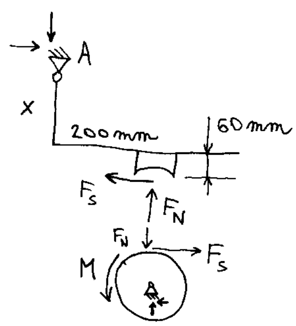
Az önzárást most úgy számoljuk, hogy a szerkezet az I.-es irányú nyomaték esetén az F erő (fékező erő) nélkül is egyensúlyban van, azaz nem mozdul (nem mozdítható) meg. Lehetett volna úgy is számolni, hogy az F erővel együtt paraméteresen végigszámoljuk az I.-es irányúnyomatékot, és a nevezőt egyenlővé tesszük nullával.

A fontos az, hogy a példa második részét értsük, mert ilyen típusú önzárás kevésbé valószínű a vizsgán.

1996.06.26. 4B Ø



I.



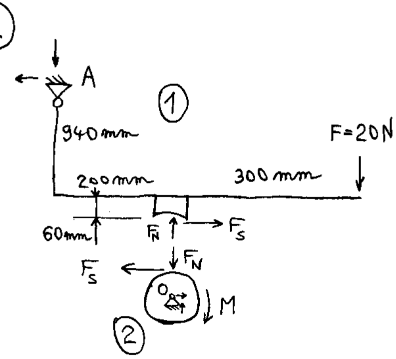
1.) $\sum M_A = 0 = F_N \cdot 200 - F_s (x+60)$

2.) $F_s = \mu F_N$

2→1.) $0 = F_N \cdot 200 - \mu F_N (x+60)$

$$\boxed{x = \frac{200}{\mu} - 60 = \frac{200}{0,2} - 60 = 940\ mm}$$

II.



1.) $\sum M_0^{(2)} = 0 = F_s \cdot 125 - M$

2.) $\sum M_A = 0 = F_N \cdot 200 + F_s \cdot 1000 - F \cdot 500$

3.) $F_s = \mu F_N$

3→2.) $\frac{F_s}{\mu} \cdot 200 + F_s \cdot 1000 - F \cdot 500 = 0$

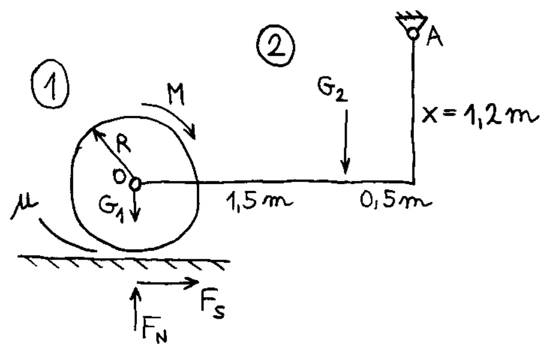
$$F_s = \frac{500 F}{\frac{200}{\mu} + 1000}$$

1.) $\boxed{M} = 125 F_s = \frac{62\,500\ F}{\frac{200}{\mu} + 1000} =$

$$= \frac{62500 \cdot 20}{\frac{200}{0,2} + 1000} = \boxed{625\ Nmm}$$

12. példa:

Mekkora M nyomatékkal lehet a korongot megmozdítani? Mekkorára kell változtatni a függőleges kar x hosszát, hogy a szerkezet önzáró legyen?



$G_1 = 2\,kN$

$G_2 = 5\,kN$

$R = 1\,m$

$\mu = 0{,}25$

1.) $\sum M_O^{(1)} = 0 = F_S \cdot 1 - M$

2.) $\sum M_A^{(1+2)} = 0 = -M + G_1 \cdot 2 + G_2 \cdot 0{,}5 + F_S(1+x) - F_N \cdot 2$

3.) $F_S = \mu F_N$

1.) $F_S = M$

3.) $F_N = \dfrac{F_S}{\mu} = \dfrac{M}{\mu}$

1,3 → 2.) $0 = -M + 2G_1 + 0{,}5\,G_2 + (1+x)M - 2\dfrac{M}{\mu}$

$$\boxed{M = \frac{2G_1 + 0{,}5G_2}{\frac{2}{\mu} - x} = \frac{2 \cdot 2 + 0{,}5 \cdot 5}{\frac{2}{0{,}25} - 1{,}2} = 0{,}9559\ kNm = 955{,}9\ Nm}$$

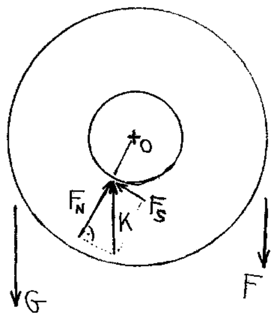
$$M = \infty \leftarrow \frac{2}{\mu} - x = 0$$

$$\boxed{x = \frac{2}{\mu} = \frac{2}{0{,}25} = 8\ m}$$

Megjegyzés:
Az 1. egyenlet átrendezett $F_S = M$ alakja elég hülyén néz ki, mert látszólag egy erő egyenlő egy nyomatékkal. Ez csak azért van, mert a korong sugarát sikerült pont 1 m-re választani, és az egyenletekbe a mértékegységet már nem írjuk be.

13. példa: A 2010.04.23.-ai. gyakorlat 2. példájának befejezése.

Számítás a részletes modell alapján:



1.) $\sum F_y = 0 = K - G - F$

2.) $K = \sqrt{F_N^2 + F_S^2}$

3.) $F_S = \mu F_N$

4.) $\sum M_o = 0 = G\frac{D}{2} - F\frac{D}{2} - F_S\frac{d}{2}$

3→2.) $K = \sqrt{F_N^2 + (\mu F_N)^2} = F_N\sqrt{1+\mu^2}$

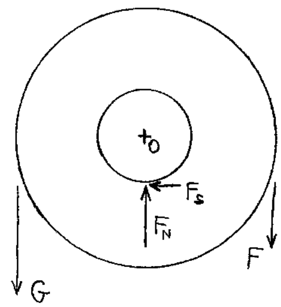
2→1.) $0 = F_N\sqrt{1+\mu^2} - G - F$

$$F_N = \frac{G+F}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

1,3→4.) $0 = GD - FD - \mu\frac{G+F}{\sqrt{1+\mu^2}}\,d$

$$\boxed{F = G\frac{D - \frac{\mu d}{\sqrt{1+\mu^2}}}{D + \frac{\mu d}{\sqrt{1+\mu^2}}} = 1\cdot\frac{500 - \frac{0{,}3\cdot 200}{\sqrt{1+0{,}3^2}}}{500 + \frac{0{,}3\cdot 200}{\sqrt{1+0{,}3^2}}} = 0{,}7938\ kN}$$

Számítás az egyszerűsített modell alapján:



1.) $\sum F_y = 0 = F_N - G - F$

2.) $\sum M_o = 0 = G\frac{D}{2} - F\frac{D}{2} - F_S\frac{d}{2}$

3.) $F_S = \mu F_N$

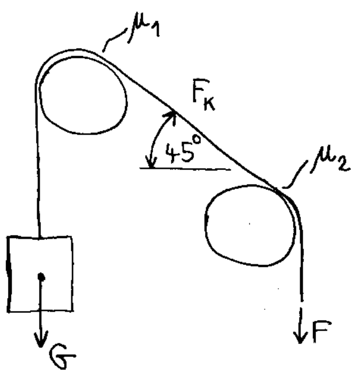
1.) $F_N = G + F$

1,3→2.) $0 = GD - FD - \mu(G+F)d$

$$\boxed{F = G\frac{D-\mu d}{D+\mu d} = 1\cdot\frac{500-0{,}3\cdot 200}{500+0{,}3\cdot 200} = 0{,}7857\ kN}$$

Kötélsúrlódás

14.példa:
Mekkora F erővel lehet a kötél végére akasztott G súlyt felfelé megmozdítani?
Milyen határok között lehet az F erő, hogy a kötél végére akasztott G súly nyugalomban maradjon?



$G = 100\ N$
$\mu_1 = 0{,}1$
$\mu_2 = 0{,}2$

Átfogási szögek: $\alpha_1 = 90 + 45 = 135° = 2{,}356\ rad$
$\alpha_2 = 90 - 45 = 45° = 0{,}7854\ rad$

a.) Elmozdul felfelé:

$G < F_K < F$

1.) $F_K = G\, e^{\mu_1 \alpha_1}$

2.) $F = F\, e^{\mu_2 \alpha_2}$

1→2.) $\underline{F} = G\, e^{\mu_1 \alpha_1} e^{\mu_2 \alpha_2} = G\, e^{(\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2)} = 100\, e^{(0{,}1 \cdot 2{,}356 + 0{,}2 \cdot 0{,}7854)} = \underline{148{,}1\ N}$

b.) Elmozdul lefelé:

$G > F_K > F$

1.) $G = F_K\, e^{\mu_1 \alpha_1}$

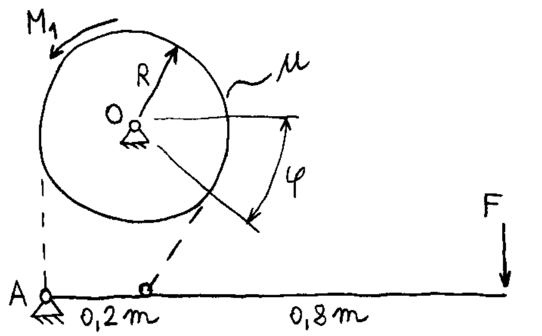
2.) $F_K = F\, e^{\mu_2 \alpha_2}$

1→2.) $\underline{F} = \dfrac{G}{e^{\mu_1 \alpha_1} + e^{\mu_2 \alpha_2}} = G\, e^{-(\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2)} = 100\, e^{-(0{,}1 \cdot 2{,}356 + 0{,}2 \cdot 0{,}7854)} = \underline{67{,}52\ N}$

$$\boxed{67{,}52 < F < 148{,}1\ N}$$

Megjegyzés:
Fontos, hogy az átfogási szöget radiánban kell behelyettesíteni a súrlódási képletbe!

15a.példa: Mekkora M_1 nyomatékkal lehet a korongot megmozdítani? A szaggatott vonal a korongon átvetett kötelet jelképezi.

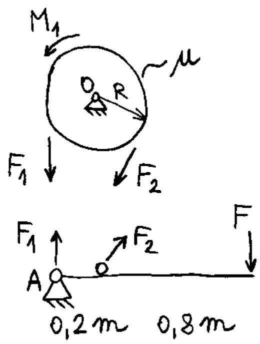


$F = 100\ N$

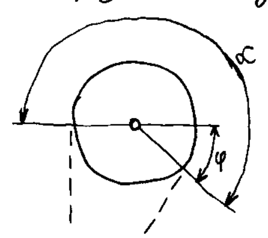
$R = 0{,}2\ m$

$\mu = 0{,}3$

$\varphi = 45^\circ$



Átfogási szög:



$\alpha = 180^\circ + \varphi = 180^\circ + 45^\circ =$

$= 225^\circ = 3{,}927\ rad$

$\alpha = \pi + \varphi = \pi + \frac{\pi}{4} =$

$= \frac{5}{4}\pi = 3{,}927\ rad$

1.) $\sum M_A = 0 = F_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0{,}2 - F \cdot 1$

2.) $\sum M_0 = 0 = F_1 R - F_2 R + M_1$

3.) $F_2 = F_1 e^{\mu\alpha} \leftarrow F_2 > F_1$

1.) $F_2 = 5\sqrt{2}\, F = 5\sqrt{2} \cdot 100 = 707{,}1\ N$

3.) $F_1 = \frac{F_2}{e^{\mu\alpha}} = \frac{707{,}1}{e^{0{,}3 \cdot 3{,}927}} = 217{,}7\ N$

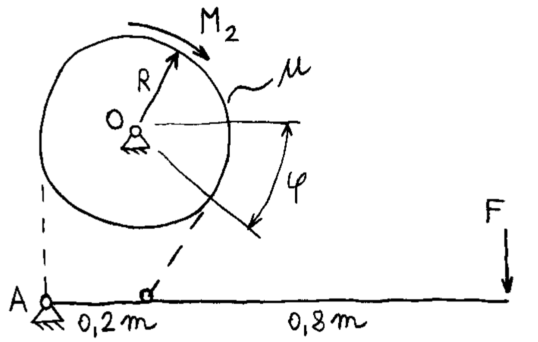
2.) $\boxed{M_1 = (F_2 - F_1) R = (707{,}1 - 217{,}7) \cdot 0{,}2 = 97{,}88\ Nm}$

Megjegyzések:

Fontos, hogy az átfogási szöget radiánban kell behelyettesíteni a súrlódási képletbe!

A forgásirány alapján most $F_2 > F_1$ (a két erő nyomatékának különbsége az elfordulás ellen hat), ezért $F_2 = F_1 e^{\mu\alpha}$.

15b.példa: Mekkora M_2 nyomatékkal lehet a korongot megmozdítani? A szaggatott vonal a korongon átvetett kötelet jelképezi.

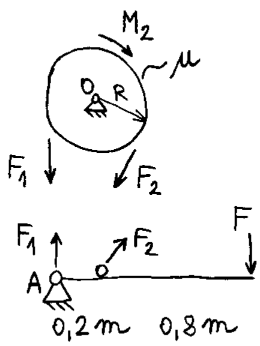


$F = 100\ N$

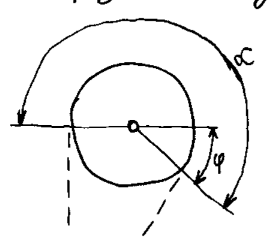
$R = 0,2\ m$

$\mu = 0,3$

$\varphi = 45^\circ$



Átfogási szög:



$$\alpha = 180^\circ + \varphi = 180^\circ + 45^\circ = $$
$$= 225^\circ = 3,927\ rad$$
$$\alpha = \pi + \varphi = \pi + \frac{\pi}{4} = $$
$$= \frac{5}{4}\pi = 3,927\ rad$$

1.) $\sum M_A = 0 = F_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0,2 - F \cdot 1$

2.) $\sum M_0 = 0 = F_1 R - F_2 R - M_2$

3.) $F_1 = F_2\, e^{\mu\alpha} \quad \leftarrow \quad F_1 > F_2$

1.) $F_2 = 5\sqrt{2} \cdot F = 5\sqrt{2} \cdot 100 = 707,1\ N$

3.) $F_1 = F_2\, e^{\mu\alpha} = 707,1\, e^{0,3 \cdot 3,927} = 2297\ N$

2.) $\boxed{M_2 = (F_1 - F_2) R = (2297 - 707,1) \cdot 0,2 = 318,0\ Nm}$

Megjegyzések:

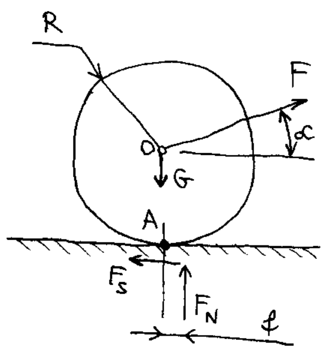
Fontos, hogy az átfogási szöget radiánban kell behelyettesíteni a súrlódási képletbe!

A forgásirány alapján most $F_1 > F_2$ (a két erő nyomatékának különbsége az elfordulás ellen hat), ezért $F_1 = F_2 e^{\mu\alpha}$.

Gördülési ellenállás

16. példa: A 2010.04.29.-ei gyakorlat 3. feladata.

Mekkora F erővel lehet a korongot az elmozdulás határhelyzetébe hozni? Mekkora a gördüléshez szükséges minimális súrlódási tényező?



$G = 100\ N$

$\alpha = 30^\circ$

$f = 0{,}05$

$R = 0{,}5\ m$

$F = ?$

$\mu = ?$

1.) $\sum F_x = 0 = F\cos\alpha - F_S$

2.) $\sum F_y = 0 = F_N - G + F\sin\alpha$

3.) $\sum M_o = 0 = F_N \cdot f - F_S \cdot R$

1.) $F_S = F\cos\alpha$

2.) $F_N = G - F\sin\alpha$

1,2 → 3.) $0 = (G - F\sin\alpha)\cdot f - F\cos\alpha \cdot R$

$$\boxed{F = \frac{G f}{f\sin\alpha + R\cos\alpha} = \frac{100\cdot 0{,}05}{0{,}05\sin 30^\circ + 0{,}5\cos 30^\circ} = 10{,}92\ N}$$

1.) $F_S = F\cos\alpha = 10{,}92\cos 30^\circ = 9{,}457\ N$

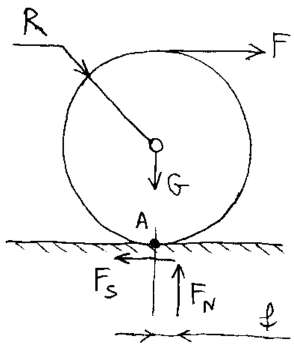
2.) $F_N = G - F\sin\alpha = 100 - 10{,}92\sin 30^\circ = 94{,}54\ N$

$$F_S = \mu F_N \rightarrow \boxed{\mu = \frac{F_S}{F_N} = \frac{9{,}457}{94{,}54} = 0{,}1000}$$

Megjegyzés:
Ha a súrlódási együttható értéke a kiszámítottnál kisebb lenne, akkor a korong nem gördülne, hanem elcsúszna a talajon.

17. példa:

Mekkora F erővel lehet a korongot az elmozdulás határhelyzetébe hozni? Mekkora a gördüléshez szükséges minimális súrlódási tényező?



$G = 500\ N$

$R = 2\ m$

$f = 0,1\ m$

$F = ?$

$\mu = ?$

1.) $\sum F_x = 0 = F - F_s$

2.) $\sum F_y = 0 = F_N - G$

3.) $\sum M_o = 0 = -F \cdot R + F_N \cdot f - F_s \cdot R$

2.) $F_N = G = 500\ N$

1.) $F_s = F$

1,2 → 3.) $0 = -F \cdot R + F_N \cdot f - F \cdot R$

$$\boxed{F = \frac{F_N f}{2R} = \frac{500 \cdot 0,1}{2 \cdot 2} = 12,5\ N}$$

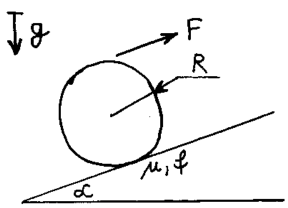
1.) $F_s = F = 12,5\ N$

$$F_s = \mu F_N \longrightarrow \boxed{\mu = \frac{F_s}{F_N} = \frac{12,5}{500} = 0,025}$$

Megjegyzés:
Ha a súrlódási együttható értéke a kiszámítottnál kisebb lenne, akkor a korong nem gördülne, hanem elcsúszna a talajon.

18a. példa: A 2010.04.29.-ei gyakorlat 4. feladata.

Mekkora F erővel lehet a korongot felfelé megmozdítani? Mekkora az ehhez szükséges súrlódási tényező?



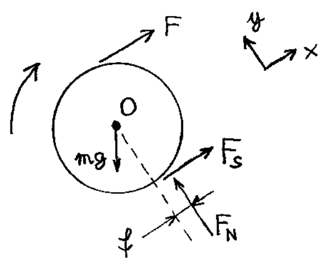
$m = 7\,kg$ $\quad F = ?$

$R = 0{,}4\,m$ $\quad \mu = ?$

$f = 0{,}05\,m$

$g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

$\alpha = 30°$



1.) $\sum F_x = 0 = F + F_s - mg\sin\alpha$

2.) $\sum F_y = 0 = F_N - mg\cos\alpha$

3.) $\sum M_o = 0 = -F\cdot R + F_s\cdot R + F_N\cdot f$

2.) $F_N = mg\cos\alpha = 7\cdot 9{,}81\cos 30° = 59{,}47\,N$

1.) $F_s = mg\sin\alpha - F$

1,2 → 3.) $0 = -F\cdot R + (mg\sin\alpha - F)\cdot R + F_N\cdot f$

$$\boxed{F = \frac{mgR\sin\alpha + F_N f}{2R} = \frac{7\cdot 9{,}81\cdot 0{,}4\sin 30° + 59{,}47\cdot 0{,}05}{2\cdot 0{,}4} = 20{,}88\,N}$$

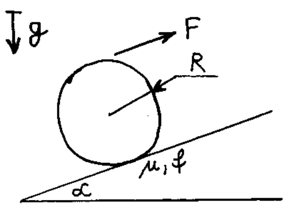
3.) $F_N = mg\cos\alpha = 7\cdot 9{,}81\cos 30° = 59{,}47\,N$

1.) $F_s = mg\sin\alpha - F = 7\cdot 9{,}81\sin 30° - 20{,}88 = 13{,}46\,N$

$F_s = \mu F_N \longrightarrow \boxed{\mu = \frac{F_s}{F_N} = \frac{13{,}46}{59{,}47} = 0{,}2263}$

Megjegyzés:
A gördülési ellenállás akadályozni igyekszik a felfelé gördülést, ezért az F_N normálerő úgy mozdul el, hogy a korong középpontjára kifejtett nyomatéka ellentétes a forgásiránnyal (balra forgat).

18b. példa:
Legalább mekkora F erő szükséges a korong egy helyben tartásához? Mekkora az ehhez szükséges súrlódási tényező?



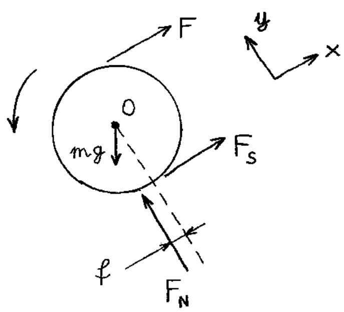
$m = 7\ kg$ $\qquad$ $F = ?$

$R = 0{,}4\ m$ $\qquad$ $\mu = ?$

$f = 0{,}05\ m$

$g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$

$\alpha = 30^\circ$



1.) $\sum F_x = 0 = F + F_s - mg\sin\alpha$

2.) $\sum F_y = 0 = F_N - mg\cos\alpha$

3.) $\sum M_o = 0 = -F \cdot R + F_s \cdot R - F_N \cdot f$

2.) $F_N = mg\cos\alpha = 7 \cdot 9{,}81 \cos 30^\circ = 59{,}47\ N$

1.) $F_s = mg\sin\alpha - F$

1,2→3.) $0 = -F \cdot R + (mg\sin\alpha - F) \cdot R - F_N \cdot f$

$$\boxed{F = \frac{mgR\sin\alpha - F_N f}{2R} = \frac{7 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}4 \sin 30^\circ - 59{,}47 \cdot 0{,}05}{2 \cdot 0{,}4} = 13{,}45\ N}$$

1.) $F_s = mg\sin\alpha - F = 7 \cdot 9{,}81 \sin 30^\circ - 13{,}45 = 20{,}89\ N$

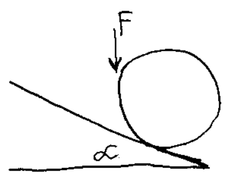
$$F_s = \mu F_N \longrightarrow \boxed{\mu = \frac{F_s}{F_N} = \frac{20{,}89}{59{,}47} = 0{,}3513}$$

Megjegyzés:
A gördülési ellenállás akadályozni igyekszik a lefelé gördülést, ezért az F_N normálerő úgy mozdul el, hogy a korong középpontjára kifejtett nyomatéka ellentétes a forgásiránnyal (jobbra forgat).

További megjegyzés:
Az, hogy a felfelé és lefelé mozdítós esetben az F és az F_S erők értéke felcserélődik, csak ebben a speciális esetben igaz (amikor az F erő a talajjal párhuzamos irányú).

19. példa:

Mekkora F erővel lehet egy helyben tartani a korongot a lejtőn? Mekkora az ehhez szükséges súrlódási tényező?



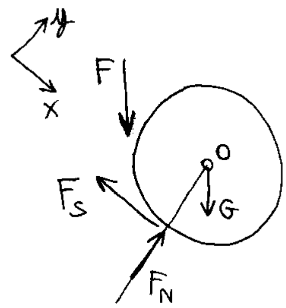
$R = 0{,}1\,m$

$G = 100\,N$

$\alpha = 40^\circ$

$F = ?$ hogy helyben maradjon

$\mu = ?$



1.) $\sum F_x = 0 = -F_S + F \sin\alpha + G \sin\alpha$

2.) $\sum F_y = 0 = F_N - F\cos\alpha - G\cos\alpha$

3.) $\sum M_o = 0 = F \cdot R - F_S \cdot R$

3.) $F_S = F$

$3 \rightarrow 1.)$ $0 = -F + F\sin\alpha + G\sin\alpha$

$$\boxed{F = \frac{G \sin\alpha}{1 - \sin\alpha} = \frac{100 \sin 40^\circ}{1 - \sin 40^\circ} = 179{,}9\ N}$$

3.) $F_S = F = 179{,}9\ N$

2.) $F_N = (F + G)\cos\alpha = (179{,}9 + 100)\cos 40^\circ = 214{,}4\ N$

$$F_S = \mu F_N \longrightarrow \boxed{\mu = \frac{F_S}{F_N} = \frac{179{,}9}{214{,}4} = 0{,}8391}$$

Megjegyzés:
Figyeljük meg, hogy mivel most nincs gördülési ellenállás, egy konkrét erővel lehet egyensúlyban tartani a korongot. Ha az F erő ennél nagyobb, akkor felfelé, ha kisebb, akkor lefelé indul el.
Ha a súrlódási együttható értéke a kiszámítottnál a kisebb, akkor hiába elegendő nagy az F erő értéke, a korong nem marad nyugalomban, mert megcsúszik a lejtőn.