

Elméleti összefoglaló

A súlypont-koordináták számítása általános térbeli esetben

Egy térbeli test súlypontjának koordinátáit úgy számíthatjuk ki, hogy olyan szabályos részegységekre bontjuk, amelyeknek ismerjük a súlyponthelyzetét és a tömegét. A teljes összeállítás súlypontjának koordinátáit ezután a következő súlyozott átlagok kiszámításával határozhatjuk meg:

$$x_s = \frac{\sum \pm x_i m_i}{\sum \pm m_i}$$

$$y_s = \frac{\sum \pm y_i m_i}{\sum \pm m_i}$$

$$z_s = \frac{\sum \pm z_i m_i}{\sum \pm m_i}$$

A számlálóban x_i , y_i és z_i az i . részegység S_i súlypontjának koordinátáit jelenti, m_i pedig az i . részegység tömegét. A \pm előjel a számlálóban és a nevezőben arra utal, hogy ha az adott részegység anyaga hiányzik a szerkezetből, akkor az \ominus jellemzőit le kell vonni. Ilyen például az ábrán kivágott kis kocka (2. részegység). Az x_i , y_i és z_i koordináták természetesen maguk is előjelesek a koordinátairányoknak megfelelően. Így a számlálóban egy (a tömegekkel) súlyozott összeg képződik, amit a test elsőrendű, vagy statikai nyomatékának nevezünk. A nevezőben pedig az össztömeg adódik ki.

Térbeli testek esetén a tömegek az $m_i = \rho_i V_i$ összefüggésből számíthatók, ahol ρ_i a részegység sűrűségét, V_i pedig a részegység térfogatát jelenti. Ha minden rész sűrűsége egyenlő, vagyis pl. azonos anyagból vannak, akkor a képletekben elegendő csak a térfogatokkal súlyozni (ρ -val egyszerűsíteni lehet):

$$\rho_i = \rho = \text{const.} \rightarrow x_s = \frac{\sum \pm x_i V_i}{\sum \pm V_i}; \quad y_s = \frac{\sum \pm y_i V_i}{\sum \pm V_i}; \quad z_s = \frac{\sum \pm z_i V_i}{\sum \pm V_i}$$

Mivel ezen $(x_s; y_s; z_s)$ pont koordinátái nem függenek az anyagjellemző sűrűségtől, csak a test geometriájától, ezért geometriai középpontnak is nevezik.

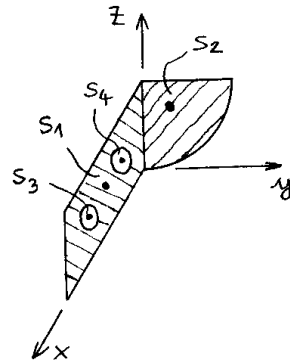
Lemezekből álló alkatrészek súlypont koordinátáinak számítása

Az előbbi alapképletek és megfontolások ilyen szerkezet esetén is használhatók:

$$x_s = \frac{\sum \pm x_i m_i}{\sum \pm m_i}$$

$$y_s = \frac{\sum \pm y_i m_i}{\sum \pm m_i}$$

$$z_s = \frac{\sum \pm z_i m_i}{\sum \pm m_i}$$



A részegységek tömege most $m_i = \rho_i v_i A_i$ alakba írható, ahol v_i az i . lemez vastagsága, A_i pedig az i . lemez területe. Ha a sűrűségek, a lemezvastagságok, vagy mindkettő állandó, akkor elhagyhatók a képletekből:

$$\rho_i = \rho = \text{const.} \rightarrow x_s = \frac{\sum \pm x_i v_i A_i}{\sum \pm v_i A_i}; y_s = \frac{\sum \pm y_i v_i A_i}{\sum \pm v_i A_i}; z_s = \frac{\sum \pm z_i v_i A_i}{\sum \pm v_i A_i}$$

$$v_i = v = \text{const.} \rightarrow x_s = \frac{\sum \pm x_i \rho_i A_i}{\sum \pm \rho_i A_i}; y_s = \frac{\sum \pm y_i \rho_i A_i}{\sum \pm \rho_i A_i}; z_s = \frac{\sum \pm z_i \rho_i A_i}{\sum \pm \rho_i A_i}$$

$$\rho_i = \rho = \text{const.} \text{ és } v_i = v = \text{const.} \rightarrow x_s = \frac{\sum \pm x_i A_i}{\sum \pm A_i}; y_s = \frac{\sum \pm y_i A_i}{\sum \pm A_i}; z_s = \frac{\sum \pm z_i A_i}{\sum \pm A_i}$$

Síkidomok súlypontjának (geometriai középpontjának) meghatározása

Síkidomok esetén a z koordináta számítása elmarad, és általában a vastagság és a sűrűség figyelembevételére sincs szükség:

$$x_s = \frac{\sum \pm x_i A_i}{\sum \pm A_i}$$

$$y_s = \frac{\sum \pm y_i A_i}{\sum \pm A_i}$$

A súlyozó tényező ekkor a részegységek A_i területe. A számlálóban kialakuló súlyozott összeget ekkor is a síkidom elsörendű, vagy statikai nyomatékának nevezzük, a nevezőben pedig az összterület adódik ki. Mivel anyagjellemzőket nem veszünk figyelembe, és az eredmény csak a síkidom geometriai adataitól függ, az $(x_s; y_s)$ pontot a síkidom geometriai középpontjának is nevezik.

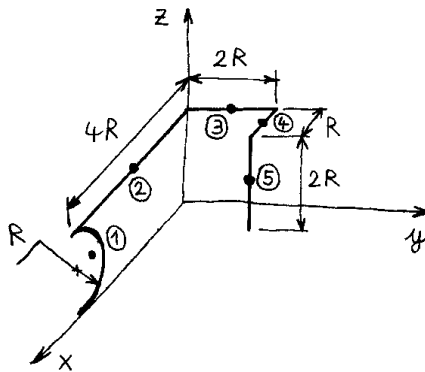
Rudakból álló szerkezetek súlypontjának és geometriai középpontjának meghatározása

Rudakból álló szerkezetek esetén is az alapképletekből indulhatunk ki, de most nincs \pm , mert rudat elég nehéz lenne kivonni:

$$x_s = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$$

$$y_s = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}$$

$$z_s = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i}$$



Ekkor a résztömegek $m_i = \rho_i A_i \ell_i$ alakba írhatók, ahol A_i az i . rúd keresztmetszeti területe, ℓ_i pedig az i . rúd hossza. Ha a rudak sűrűsége és keresztmetszeti területe azonos ($\rho_i = \rho = \text{const.}$ és $A_i = A = \text{const.}$), akkor csak a rúdhossz a súlyozó tényező.

$$x_s = \frac{\sum x_i \ell_i}{\sum \ell_i}$$

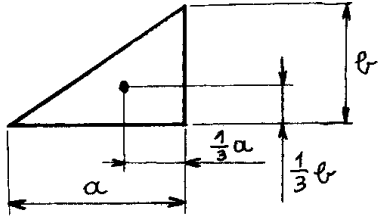
$$y_s = \frac{\sum y_i \ell_i}{\sum \ell_i}$$

$$z_s = \frac{\sum z_i \ell_i}{\sum \ell_i}$$

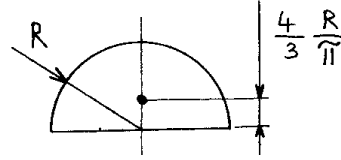
Ebben az esetben is helyesebb geometriai középpontról beszélni, mert az anyagjellemzőket és a rúd keresztmetszeti tulajdonságait nem vettük figyelembe, csak a szerkezet geometriáját. Ha a rúdszerkezet síkbeli, akkor itt sem kell törődni a z koordinátával.

Néhány jellegzetes alakú síkidom és íves rúd súlyponthelyzete

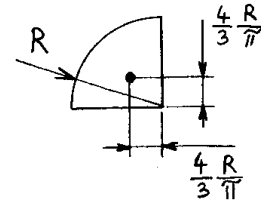
Síkidomok: háromszög, félkör, negyed-kör



$$A = \frac{1}{2} a b$$

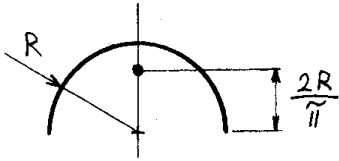


$$A = \frac{R^2 \pi}{2}$$

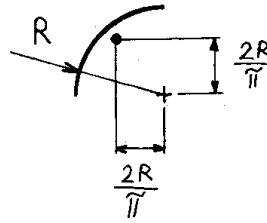


$$A = \frac{R^2 \pi}{4}$$

Íves rudak: 180° és 90° -os ív

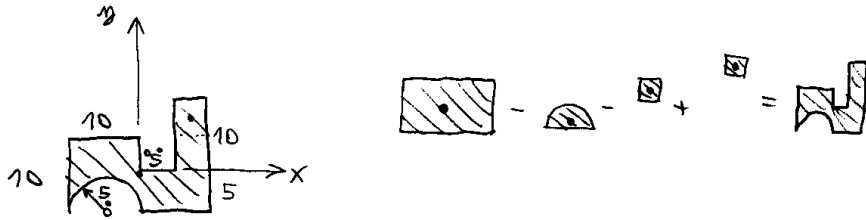


$$l = R \pi$$



$$l = \frac{R \pi}{2}$$

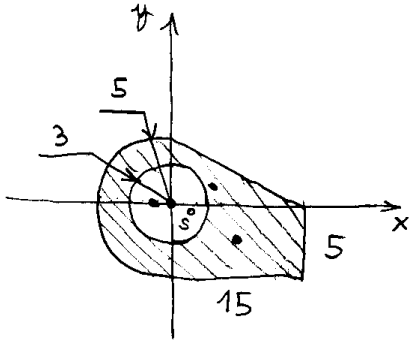
1. példa: A 2010.04.29.-ei gyakorlat 5. feladata.



$$x_s = \frac{+0 - (-5) \cdot \frac{5^2 \pi}{2} - (2,5) \cdot 5 \cdot 5 + (7,5) \cdot 5 \cdot 5}{+20 \cdot 10 - \frac{5^2 \pi}{2} - 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5} = \frac{321,3}{160,7} = 2 \text{ mm}$$

$$y_s = \frac{+0 - (-5 + \frac{4 \cdot 5}{3 \pi}) \frac{5^2 \pi}{2} - (2,5) \cdot 5 \cdot 5 + (7,5) \cdot 5 \cdot 5}{160,7} = \frac{238,0}{160,7} = 1,481 \text{ mm}$$

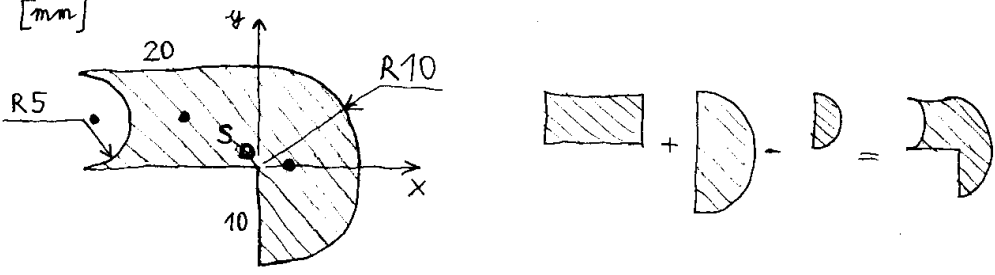
2. példa: A 2010.04.30.-ai. gyakorlat 5. feladata.



$$x_s = \frac{+(-\frac{4 \cdot 5}{3 \pi}) \frac{5^2 \pi}{2} + (7,5) \cdot 15 \cdot 5 + (\frac{1}{3} \cdot 15) \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 5 - 0}{+\frac{5^2 \pi}{2} + 15 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 5 - 3^2 \pi} = \frac{666,7}{123,5} = 5,398 \text{ mm}$$

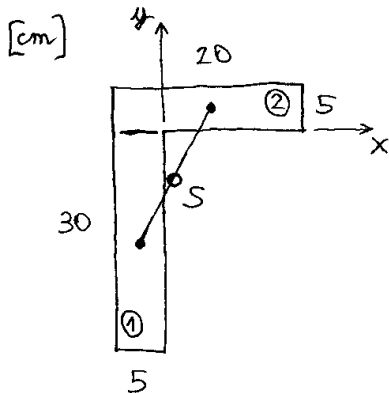
$$y_s = \frac{0 + (-2,5) \cdot 15 \cdot 5 + (\frac{1}{3} \cdot 5) \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 5 - 0}{123,5} = \frac{-125}{123,5} = -1,012 \text{ mm}$$

3. példa:



$$x_s = \frac{+(-10) \cdot 20 \cdot 10 + \left(+4 \frac{10}{3} \frac{\pi}{\pi}\right) \cdot \frac{10^2 \pi}{2} - \left(-20 + \frac{4}{3} \frac{5}{\pi}\right) \cdot \frac{5^2 \pi}{2}}{+20 \cdot 10 + \frac{10^2 \pi}{2} - \frac{5^2 \pi}{2}} = \frac{-631,3}{317,8} = -1,986 \text{ mm}$$

$$y_s = \frac{+(+5) \cdot 20 \cdot 10 + (0) - (+5) \cdot \frac{5^2 \pi}{2}}{317,8} = \frac{+803,7}{317,8} = +2,529 \text{ mm}$$



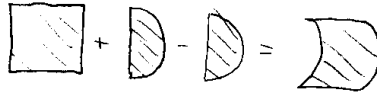
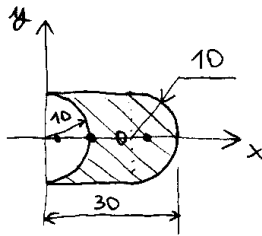
$$x_s = \frac{+(-2,5) \cdot 5 \cdot 25 + (+5) \cdot 20 \cdot 5}{+5 \cdot 25 + 20 \cdot 5} = \frac{+187,5}{225} = +0,8\bar{3} \text{ cm}$$

$$y_s = \frac{+(-12,5) \cdot 5 \cdot 25 + (+2,5) \cdot 20 \cdot 5}{225} = \frac{-1312,5}{225} = -5,8\bar{3} \text{ cm}$$

Megjegyzés:

Ha két darabból áll a síkidom, akkor a darabok súlypontjait összekötő egyenesen lesz az eredő súlypont. Pontos elhelyezkedése a darabok területeinek arányától függ.

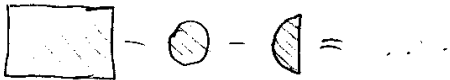
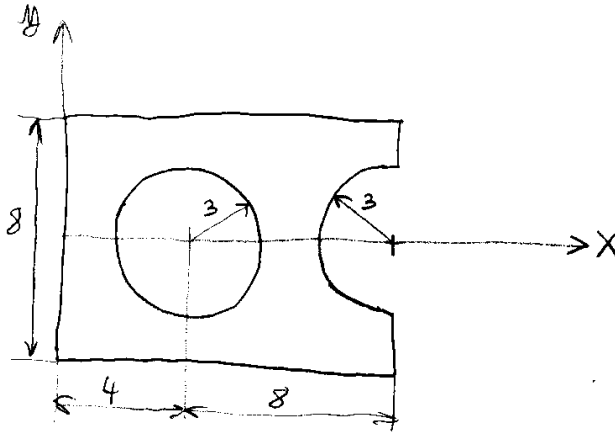
4. példa:



$$x_s = \frac{+(10) \cdot 20 \cdot 20 + \left(20 + \frac{4}{3} \frac{10}{\pi}\right) \cdot \frac{10^2 \pi}{2} - \left(\frac{4}{3} \frac{10}{\pi}\right) \cdot \frac{10^2 \pi}{2}}{+ 20 \cdot 20 + \frac{10^2 \pi}{2} - \frac{10^2 \pi}{2}} = \frac{7142}{400} = 17,86 \text{ mm}$$

$$y_s = 0$$

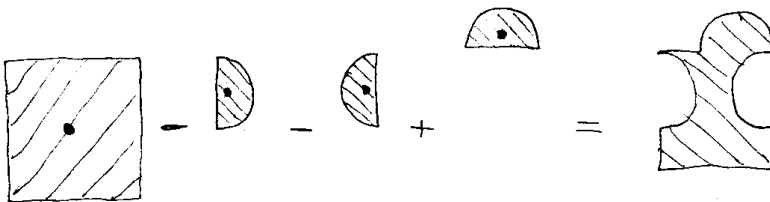
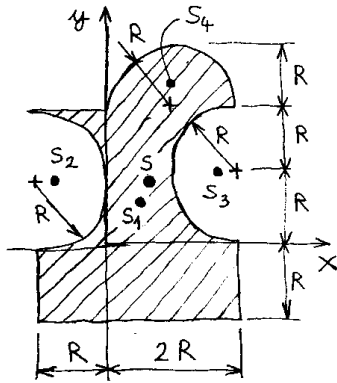
5. példa:



$$x_s = \frac{6 \cdot 12 \cdot 8 - 4 \cdot 3^2 \pi - \left(12 - \frac{4}{3} \frac{3}{\pi}\right) \cdot \frac{3^2 \pi}{2}}{12 \cdot 8 - 3^2 \pi - \frac{3^2 \pi}{2}} = 5,89 \text{ mm}$$

$$y_s = 0$$

6. példa:



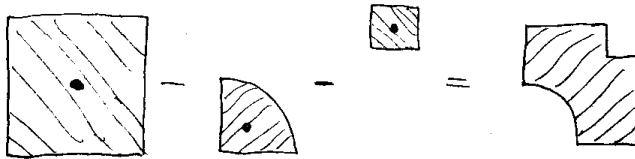
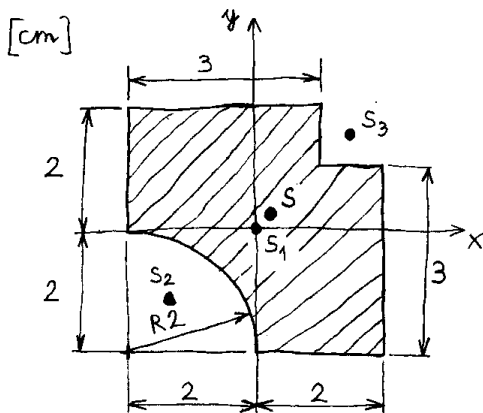
$$\boxed{x_s} = \frac{\sum \pm x_i A_i}{\sum \pm A_i} = \frac{+(0,5R) \cdot 3R \cdot 3R - \left(-R + \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}\right) \cdot \frac{R^2 \pi}{2} - \left(+2R - \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}\right) \cdot \frac{R^2 \pi}{2} + (+R) \cdot \frac{R^2 \pi}{2}}{+3R \cdot 3R - \frac{R^2 \pi}{2} - \frac{R^2 \pi}{2} + \frac{R^2 \pi}{2}} =$$

$$= \frac{+4,5 R^3}{7,429 R^2} = \boxed{+0,6057 R}$$

$$\boxed{y_s} = \frac{\sum \pm y_i A_i}{\sum \pm A_i} = \frac{+(+0,5R) \cdot 3R \cdot 3R - (+R) \frac{R^2 \pi}{2} - (+R) \frac{R^2 \pi}{2} + \left(2R + \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}\right) \cdot \frac{R^2 \pi}{2}}{7,429 R^2} =$$

$$= \frac{+5,167 R^3}{7,429 R^2} = \boxed{+0,6955 R}$$

7. példa:

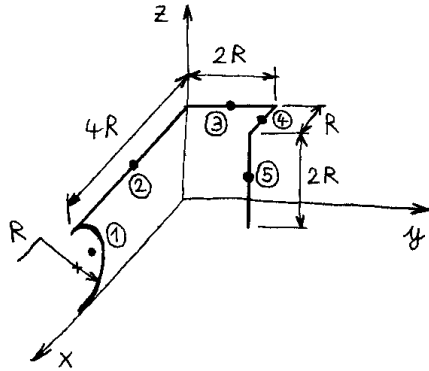


$$\bar{x}_S = \frac{\sum \pm x_i A_i}{\sum \pm A_i} = \frac{+0 - \left(-2 + \frac{4}{3}\pi\right) \cdot \frac{2^2\pi}{4} - (+1,5) \cdot 1 \cdot 1}{+4 \cdot 4 - \frac{2^2\pi}{4} - 1 \cdot 1} =$$

$$= \frac{+2,117}{11,86} = +0,1785 \text{ cm}$$

$$\bar{y}_S = \bar{x}_S = +0,1785 \text{ cm} \quad \leftarrow \text{szimmetria}$$

8. példa:



$$\bar{x}_s = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i} = \frac{\left(4R - \frac{2R}{\sqrt{2}}\right) \cdot R\sqrt{2} + (+2R) \cdot 4R + 0 + \left(\frac{+1}{2}R\right) \cdot R + (+R) \cdot 2R}{R\sqrt{2} + 4R + 2R + R + 2R} =$$

$$= \frac{21,07 R^2}{12,14 R} = \boxed{1,736 R}$$

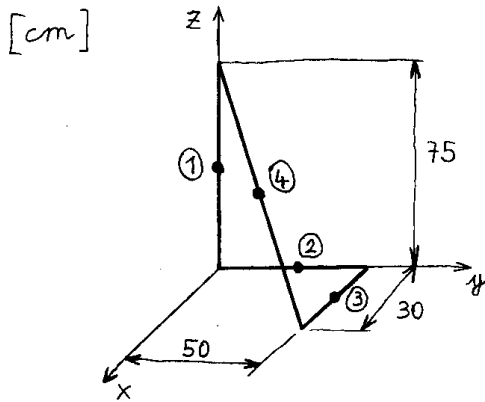
$$\bar{y}_s = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i} = \frac{0 + 0 + (+R) \cdot 2R + (+2R) \cdot R + (+2R) \cdot 2R}{12,14 R} =$$

$$= \frac{8 R^2}{12,14 R} = \boxed{0,6590 R}$$

$$\bar{z}_s = \frac{\sum z_i l_i}{\sum l_i} = \frac{(+R) \cdot R\sqrt{2} + (+2R) \cdot 4R + (+2R) \cdot 2R + (+2R) \cdot R + (+R) \cdot 2R}{12,14 R} =$$

$$= \frac{19,14 R^2}{12,14 R} = \boxed{1,577 R}$$

9. példa:



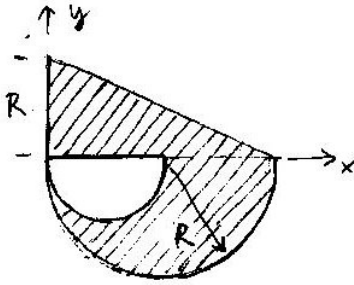
$$l_4 = \sqrt{30^2 + 50^2 + 75^2} = 95 \text{ cm}$$

$$\boxed{x_s} = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i} = \frac{(0) + (0) + (+15) \cdot 30 + (+15) \cdot 95}{75 + 50 + 30 + 95} = \frac{+1875}{250} = \boxed{+7,5 \text{ cm}}$$

$$\boxed{y_s} = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i} = \frac{(0) + (+25) \cdot 50 + (+50) \cdot 30 + (+25) \cdot 95}{250} = \frac{+5125}{250} = \boxed{+20,5 \text{ cm}}$$

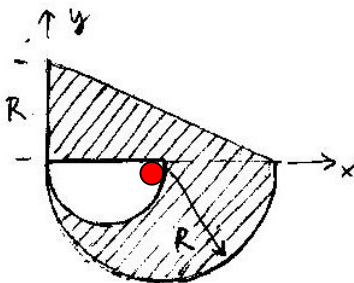
$$\boxed{z_s} = \frac{\sum z_i l_i}{\sum l_i} = \frac{(+37,5) \cdot 75 + (0) + (0) + (+37,5) \cdot 95}{250} = \frac{+6375}{250} = \boxed{+25,5 \text{ cm}}$$

Sz-1:

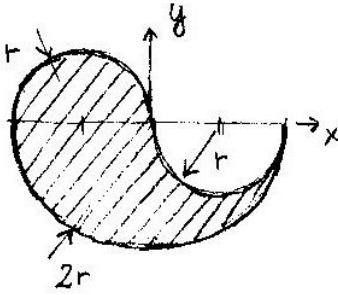


$$x_s = \frac{\left(+\frac{1}{3} \cdot 2R\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R + (+R) \frac{R^2 \pi}{2} - \left(+\frac{R}{2}\right) \frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2 \pi}{2}}{\frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R + \frac{R^2 \pi}{2} - \frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2 \pi}{2}} = \frac{+2,041R^3}{2,178R^2} = +0,9371R$$

$$y_s = \frac{\left(+\frac{1}{3}R\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R + \left(-\frac{4R}{3\pi}\right) \frac{R^2 \pi}{2} - \left(-\frac{4\left(\frac{R}{2}\right)}{3\pi}\right) \frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2 \pi}{2}}{2,178R^2} = \frac{+0,2500R^3}{2,178R^2} = -0,1148R$$

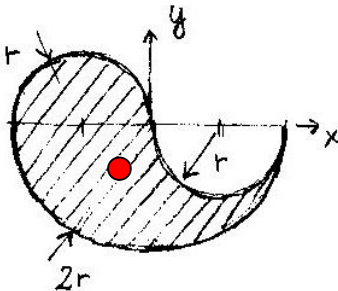


Sz-2:

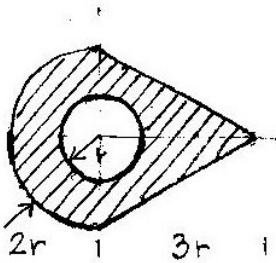


$$x_s = \frac{(-r) \frac{r^2 \pi}{2} + (0) - (+r) \frac{r^2 \pi}{2}}{\frac{r^2 \pi}{2} + \frac{(2r)^2 \pi}{2} - \frac{r^2 \pi}{2}} = \frac{-r^3 \pi}{2r^2 \pi} = -0,5r$$

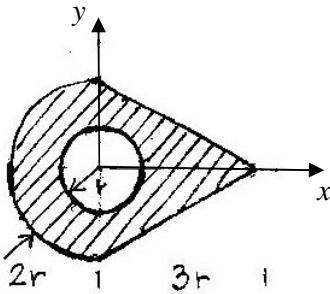
$$y_s = \frac{\left(+\frac{4r}{3\pi}\right) \frac{r^2 \pi}{2} + \left(-\frac{4 \cdot 2r}{3\pi}\right) \frac{(2r)^2 \pi}{2} - \left(-\frac{4r}{3\pi}\right) \frac{r^2 \pi}{2}}{2r^2 \pi} = \frac{-4,000r^3}{6,283r^2} = -0,6366R$$



Sz-3:

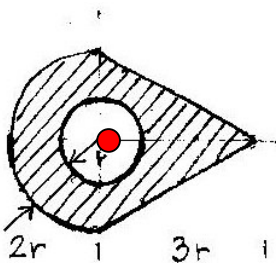


Mivel nem jelölték ki a koordinátatengelyeket, célszerűen a vízszintes szimmetriatengelyt választjuk x tengelynek, az y tengelyt pedig a kör középpontjához igazítjuk:

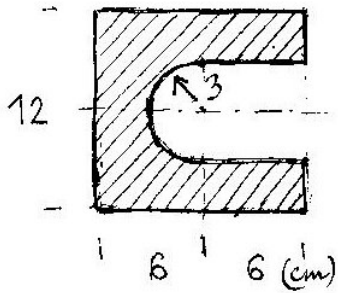


$$x_s = \frac{\left(-\frac{4}{3} \cdot 2r\right) \frac{(2r)^2 \pi}{2} + \left(+\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot r\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 3r \cdot 4r - (0)}{\frac{(2r)^2 \pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3r \cdot 4r - r^2 \pi} = \frac{+0,6667r^3}{9,142r^2} = +0,07292r$$

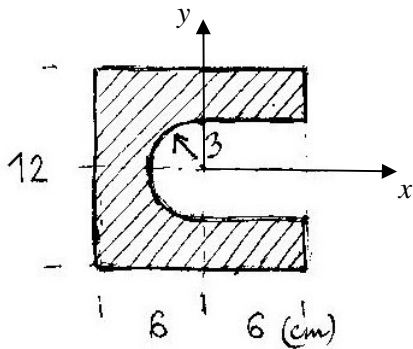
$$y_s = 0 \quad (\text{szimmetria})$$



Sz-4:

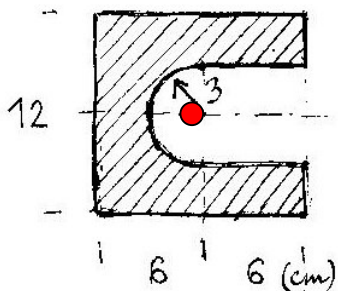


Mivel nem jelölték ki a koordinátatengelyeket, célszerűen a vízszintes szimmetriatengelyt választjuk x tengelynek, az y tengelyt pedig a kivágott félkör átmérőjéhez és egyben a kivágott négyzet oldalához igazítjuk:

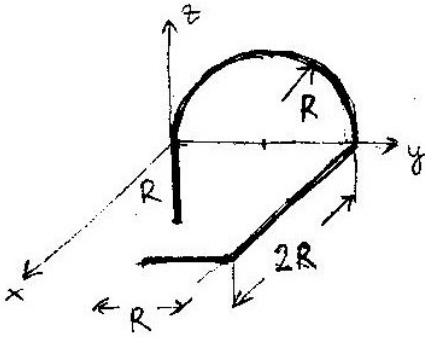


$$x_s = \frac{(0) - (+3) \cdot 6 \cdot 6 - \left(-\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{\pi}\right) \frac{3^2 \pi}{2}}{12 \cdot 12 - 6 \cdot 6 - \frac{3^2 \pi}{2}} = \frac{-90,00}{93,86} = -0,9589 \text{ cm}$$

$$y_s = 0 \quad (\text{szimmetria})$$



Sz-5: Térbeli drótváz feladat

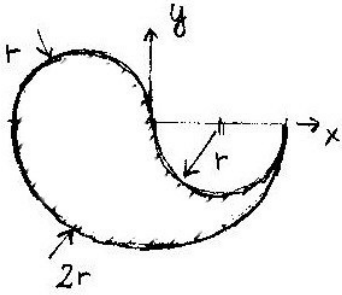


$$x_s = \frac{(0) + (0) + (+R) \cdot 2R + (+2R) \cdot R}{R + R\pi + 2R + R} = \frac{+4R^2}{7,142R} = +0,5601R$$

$$y_s = \frac{(0) + (+R) \cdot R\pi + (+2R) \cdot 2R + (+1,5R) \cdot R}{7,142R} = \frac{+8,642R^2}{7,142R} = +1,210R$$

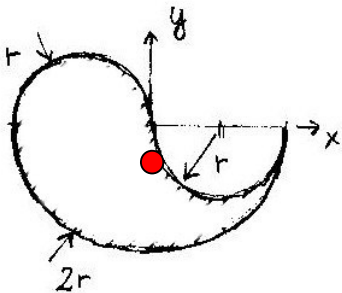
$$z_s = \frac{\left(-\frac{1}{2}R\right) \cdot R + \left(+\frac{2R}{\pi}\right) \cdot R\pi + (0) + (0)}{7,142R} = \frac{+1,5R^2}{7,142R} = +0,2100R$$

Sz-6: Síkbeli drótváz feladat



$$x_s = \frac{(-r) \cdot r\pi + (+r) \cdot r\pi + (0)}{r\pi + r\pi + 2r\pi} = \frac{0}{4r\pi} = 0$$

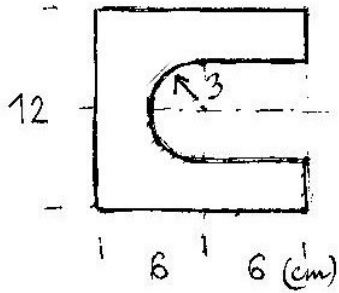
$$y_s = \frac{\left(+\frac{2r}{\pi}\right) \cdot r\pi + \left(-\frac{2r}{\pi}\right) \cdot r\pi + \left(-\frac{2(2r)}{\pi}\right) \cdot (2r)\pi}{4r\pi} = \frac{-8r^2}{12,57r} = -0,6364r$$



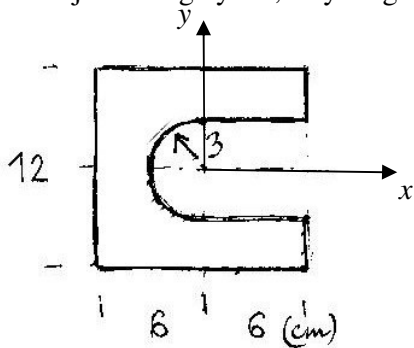
Megjegyzés:

Mindkét koordináta számításánál a számláló első két tagja kiejti egymást. Ez azért van, mert a két azonos méretű félkör súlypontkoordinátái tükörszimmetrikusan helyezkednek el az x és az y tengelyre is. Mivel az y tengelyre a nagyobbik félkör is szimmetrikus, így a súlypont x koordinátája nullára adódik. Az előbbi gondolatmenet alapján erre számolás nélkül is rájöhetünk volna, de így utólag tanulságosabb az eset...

Sz-7: Síkbeli drótváz feladat

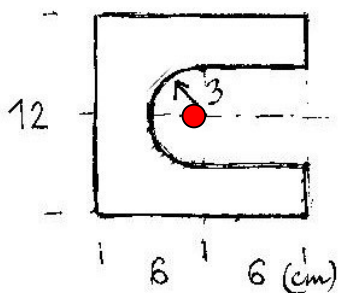


Mivel nem jelölték ki a koordinátatengelyeket, célszerűen a vízszintes szimmetriatengelyt választjuk x tengelynek, az y tengelyt pedig a félkör átmérőjéhez igazítjuk:



$$x_s = \frac{(-6) \cdot 12 + 2 \cdot (0) + 2 \cdot (+6) \cdot 3 + 2 \cdot (+3) \cdot 6 + \left(-\frac{2 \cdot 3}{\pi}\right) \cdot 3\pi}{12 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3\pi} = \frac{-18}{63,42} = -0,2838 \text{ cm}$$

$$y_s = 0 \quad (\text{szimmetria})$$



Megjegyzés:

A 2-es szorzók arra utalnak, hogy az alsó és felső vízszintes szakaszokat, valamint a bal oldali függőleges szakaszokat páronként vettük számításba, mivel a párok x irányú súlypontkoordinátái azonosak.