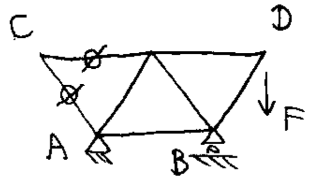
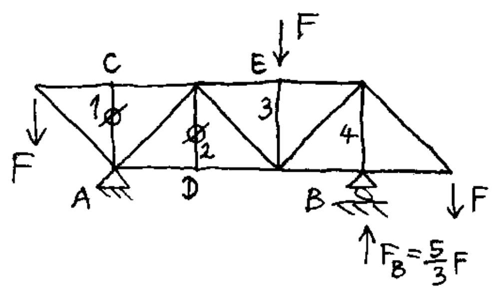
Egy kis elmélet: vakrudak

Az egyik lehetőség, ha két rúd szög alatt találkozik (nem egyvonalban vannak), és nem működik a csomópontra terhelés. Ilyen az 1.ábra C csomópontja. Ekkor az ide befutó mindkét rúd vakrúd. Ez azért van, mert kér erő csak úgy lehet egyensúlyban, ha egy egyenesbe esnek.

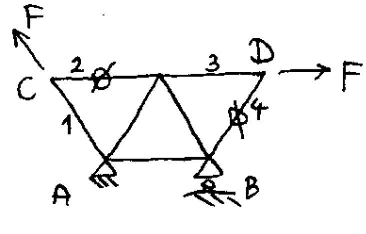
Vigyázni kell, hogy ha van teher a csomóponton (ami akár reakcióerő is lehet), akkor ez már nem igaz. Ilyen az 1.ábra D csomópontja. Általánosságban is igaz, hogy a szerkezetre ható erők ugyanúgy számítanak, mint a rudak. Ez azért van, mert a csomópontnak mindegy, hogy egy külső erő (ami reakcióerő is lehet), vagy egy rúdban ébredő erő (ami rúdirányú) hat rá.



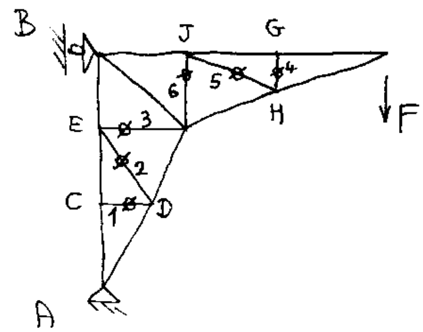
A másik lehetőség, amikor egy csomópontban három rúd találkozik, amik közül kettő egy egyenesbe esik, a harmadik pedig szög alatt fut be a csomópontba (nem kell, hogy derékszög legyen), és nincs külső terhelés. Ez azért van, mert a harmadik rúd olyan erőkomponenst is kifejt, amit az első két rúdban ható rúdirányú erők nem tudnának egyensúlyozni. Ilyen a 2.ábra C csomópontja, amiből következik, hogy az 1-es rúd vakrúd. Ugyanez a helyzet a D csomópontba befutó 2-es rúddal. Az E csomóponton van teher, így a 3-as rúd már nem lesz vakrúd, hanem felveszi a külső erőt. A 4-es szintén nem vakrúd, mert a B pontra az F_B reakcióerő is működik.



A rúderők és a külső erők egyenértékűségét a 3.ábra szemlélteti. Itt a C és D csomópontokban egy rúd és egy erő esik egy vonalba, és a szög alatt befutó 2-es és 4-es rúd vakrúd. Az 1-es és 3-as viszont egyensúlyozza a külső erőt.



A 4.ábra azt mutatja, hogy ha bizonyos rudakról kiderül, hogy vakrudak, akkor még továbbiak is azok lehetnek. Ez azért van, mert a vakrudakban nincs erő, ami azt jelenti, hogy kivehetők a szerkezetből anélkül, hogy az összedőlne. A kivételük után viszont újabb csomópontok alakulhatnak át az előbb ismertetett vakrudat tartalmazó típusokká. Most először a C csomópont alapján látszik, hogy az 1-es rúd vakrúd. Ha elképzeljük, hogy már nincs is a szerkezetben, akkor a D csomópontba már csak a 2-es rúd fut be szög alatt, így az is vakrúd. Ha azt is kivesszük, akkor az E csomópont alapján a 3-as rúd is vakrúd lesz. Ugyanez a folyamat adódik a G csomópontból kiindulva is.



Fontos még, hogy nem csak a vakrudakban lehet nulla erő. A számításokból kijöhet nulla erő olyan rudakra is, amikről nem látszik, hogy vakrudak. Ez teljesen normális.

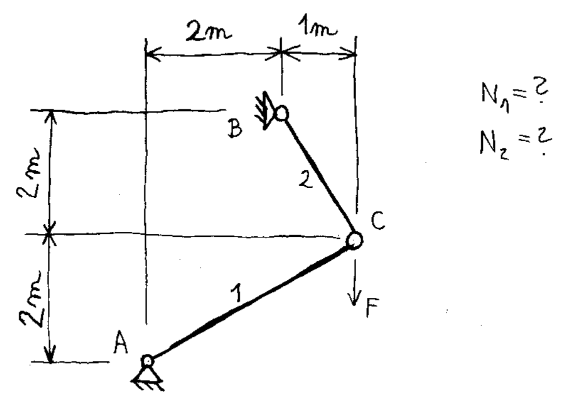
Az is fontos, hogy a vakrudaknak általában csak az egyik végük olyan, mint az előbb bemutatott esetek egyike. A másik végről nem látszik, hogy vakrúdról van szó. Ez is normális, és ha az egyik végződés vakrúd típusú, akkor nem is kell megnézni a másikat. Ott úgy alakul a szerkezet erőjátéka, hogy a vakrúdban nem lesz erő, de a bonyolultabb csomópont esetében ez csak a számításból látszana.

A tankönyvben a 258-260. oldalon olvashatunk a vakrudakról és egyéb speciális rúdelrendezésekről, például az X- és K rácsozatról.

Csomóponti módszer

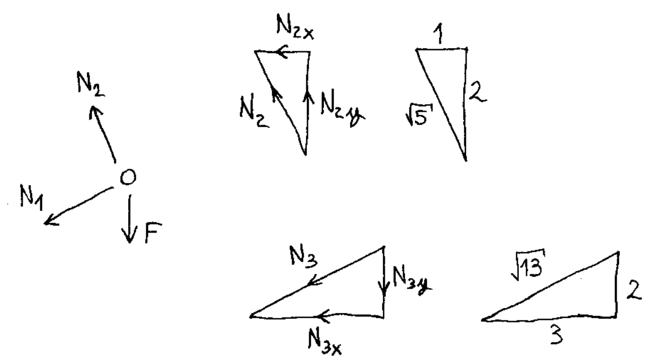
1. példa: Síkbeli bakállvány számítása csomóponti módszerrel.

Számítsuk ki a rúderőket!



$N_1 = ?$

$N_2 = ?$



$$1.)\quad \sum F_x^{(c)} = 0 = -N_1 \frac{3}{\sqrt{13}} - N_2 \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2.)\quad \sum F_y^{(c)} = 0 = -N_1 \frac{2}{\sqrt{13}} + N_2 \frac{2}{\sqrt{5}} - F$$

$$1.)\quad \frac{-N_1}{\sqrt{13}} = \frac{N_2}{3\sqrt{5}}$$

$$1. \rightarrow 2.)\quad 0 = \frac{2 N_2}{3\sqrt{5}} + \frac{2 N_2}{\sqrt{5}} - F$$

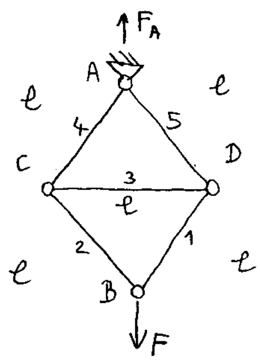
$$F = \frac{2 + 3 \cdot 2}{3\sqrt{5}} N_2 \longrightarrow \boxed{N_2 = \frac{3}{8}\sqrt{5}\, F = 0{,}8385\, F \ (h)}$$

$$1.)\quad \boxed{N_1 = \frac{-\sqrt{13}}{3\sqrt{5}} N_2 = \frac{-\sqrt{13}}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{8}\sqrt{5}\, F = \frac{-\sqrt{13}}{8} F = -0{,}4507\, F \ (ny)}$$

2. példa:

Itt fel kell ismerni a szimmetriát, és akkor alig kell számolni. (szabályos háromszögek)
Most is a csomóponti módszert használjuk.

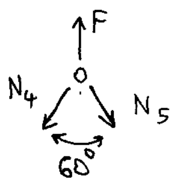
Számítsuk ki a rúderőket!



$N_i = ?$

$\sum F_y = 0 \rightarrow F_A = F \ (\uparrow)$

$\boxed{A}$



1.) $\sum F_x^{(A)} = 0 = N_5 \cdot \frac{1}{2} - N_4 \cdot \frac{1}{2}$

2.) $\sum F_y^{(A)} = 0 = F - N_4 \frac{\sqrt{3}}{2} - N_5 \frac{\sqrt{3}}{2}$

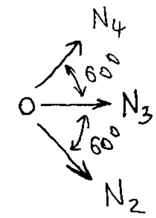
1.) $N_4 = N_5$

1→2.) $F = 2 N_4 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} N_4$

$\boxed{N_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} F \ (h)}$

1.) $\boxed{N_5 = \frac{1}{\sqrt{3}} F \ (h)}$

$\boxed{C}$



1.) $\sum F_x^{(C)} = 0 = N_3 + N_2 \frac{1}{2} + N_4 \frac{1}{2}$

2.) $\sum F_y^{(C)} = 0 = N_4 \frac{\sqrt{3}}{2} - N_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$

2.) $\boxed{N_2 = N_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} F \ (h)}$

1.) $\boxed{N_3 = -\frac{1}{2}(N_2 + N_4) = \frac{-1}{\sqrt{3}} F \ (ny)}$

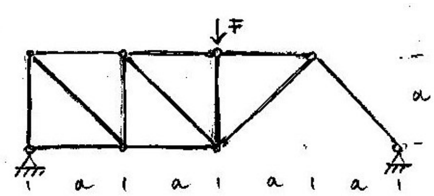
Szimmetriák:

$A \sim B$

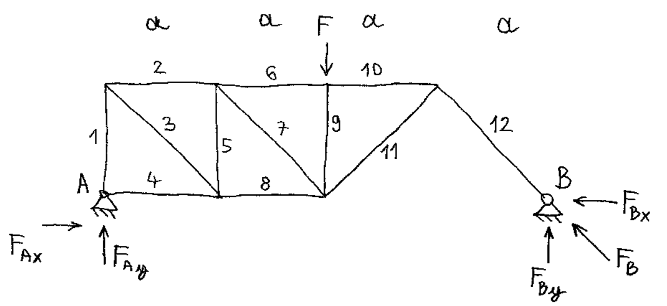
$C \sim D$

$N_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} F \ (h)$

3. példa: A 2010.03.18.-ai gyakorlat 4. feladata.



Határozzuk meg a rúderők nagyságát és értelmét (h/ny)!

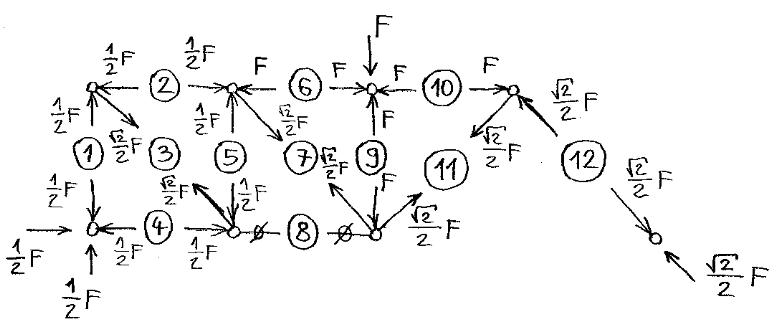


$$\sum M_A = 0 = -F \cdot 2a + F_{By} \cdot 4a \rightarrow \boxed{F_{By} = \tfrac{1}{2} F \ (\uparrow)}$$

$$45^\circ \longrightarrow \boxed{F_{Bx} = F_{By} = \tfrac{1}{2} F \ (\leftarrow)} \longrightarrow \boxed{F_B = \tfrac{\sqrt{2}}{2} F \ (\nwarrow)}$$

$$\sum F_x = 0 \longrightarrow \boxed{F_{Ax} = F_{Bx} = \tfrac{1}{2} F \ (\rightarrow)}$$

$$\sum F_y = 0 = F_{Ay} - F + F_{By} = F_{Ay} - F + \left(\tfrac{1}{2} F\right) \longrightarrow \boxed{F_{Ay} = \tfrac{1}{2} F \ (\uparrow)}$$



Sorrend:

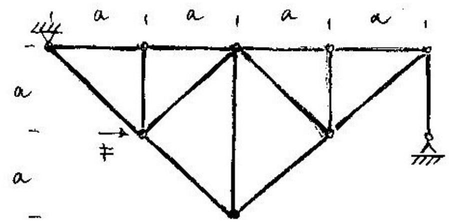
9, 12, 4, 1,
3, 2, 5, 8,
11, 7, 10, 6

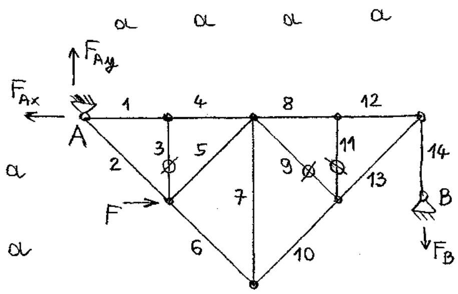
$N_1 = -\frac{1}{2} F$ (ny)	$N_7 = +\frac{\sqrt{2}}{2} F$ (h)
$N_2 = -\frac{1}{2} F$ (ny)	$N_8 = 0$
$N_3 = +\frac{\sqrt{2}}{2} F$ (h)	$N_9 = -F$ (ny)
$N_4 = -\frac{1}{2} F$ (ny)	$N_{10} = -F$ (ny)
$N_5 = -\frac{1}{2} F$ (ny)	$N_{11} = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ (h)
$N_6 = -F$ (ny)	$N_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ny)

Megjegyzés:
A 8-as rudat nem tudtuk vakrúdként azonosítani. Csak a számítás során derült ki, hogy nem ébred benne erő.

4. példa:

Határozzuk meg a rúderők nagyságát és értelmét (h/ny)!

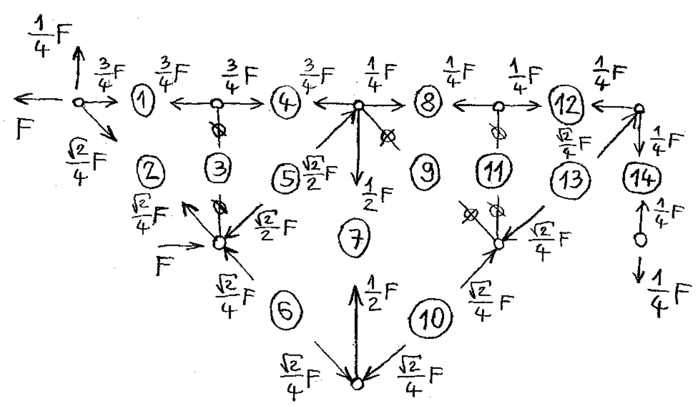




$\sum F_x = 0 \longrightarrow \boxed{F_{Ax} = F\ (\leftarrow)}$

$\sum M_A = 0 = F \cdot a - F_B \cdot 4a \longrightarrow \boxed{F_B = \frac{1}{4} F\ (\downarrow)}$

$\sum F_y = 0 = F_{Ay} - F_B \longrightarrow \boxed{F_{Ay} = F_B = \frac{1}{4} F\ (\uparrow)}$



Sorrend:

3, 11, 9,
14, 12, 13,
8, 6, 7,
2, 1, 4, 5

$N_1 = +\frac{3}{4}F\ (h)$

$N_2 = +\frac{\sqrt{2}}{4}F\ (h)$

$N_3 = 0$

$N_4 = +\frac{3}{4}F\ (h)$

$N_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2}F\ (ny)$

$N_6 = -\frac{\sqrt{2}}{4}F\ (ny)$

$N_7 = +\frac{1}{2}F\ (h)$

$N_8 = +\frac{1}{4}F\ (h)$

$N_9 = 0$

$N_{10} = -\frac{\sqrt{2}}{4}F\ (ny)$

$N_{11} = 0$

$N_{12} = +\frac{1}{4}F\ (h)$

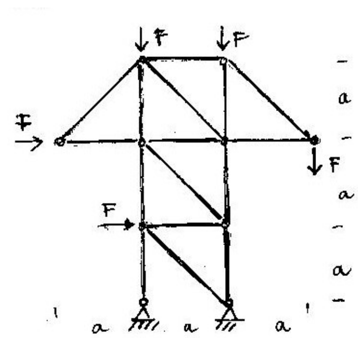
$N_{13} = -\frac{\sqrt{2}}{4}F\ (ny)$

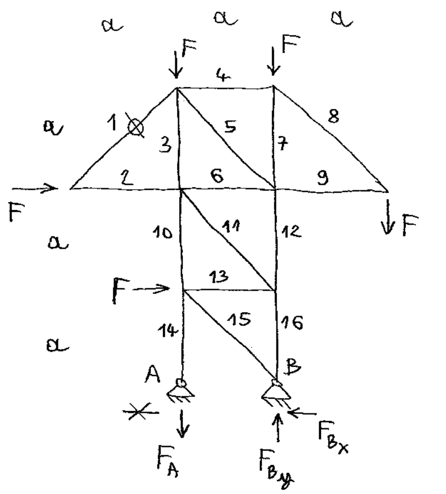
$N_{14} = +\frac{1}{4}F\ (h)$

Megjegyzés:
A 3-as, 11-es és 9-es rudakat még a számítás előtt vakrúdként azonosítottuk. A 9-esről csak akkor derült ki, hogy vakrúd, miután a 11-est gondolatban már kivettük a szerkezetből.

5. példa:

Határozzuk meg a rúderők nagyságát és értelmét (h/ny)!

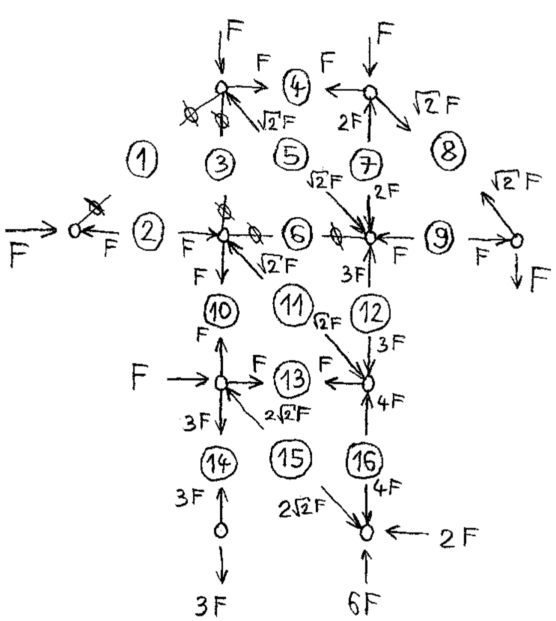




$$\sum F_x = 0 = F + F - F_{Bx} \rightarrow \boxed{F_{Bx} = 2F\ (\leftarrow)}$$

$$\sum M_B = 0 = -F\cdot a - F\cdot 2a + F\cdot a + 0 - Fa + F_A\cdot a \rightarrow \boxed{F_A = 3F\ (\downarrow)}$$

$$\sum F_y = 0 = -F_A - F - F - F + F_{By} = -(3F) - 3F - F_{By} \rightarrow \boxed{F_{By} = 6F\ (\uparrow)}$$



Sorrend:

1, 2, 14, 8,
9, 4, 7, 5,
3, 12, 6, 11,
10, 13, 16

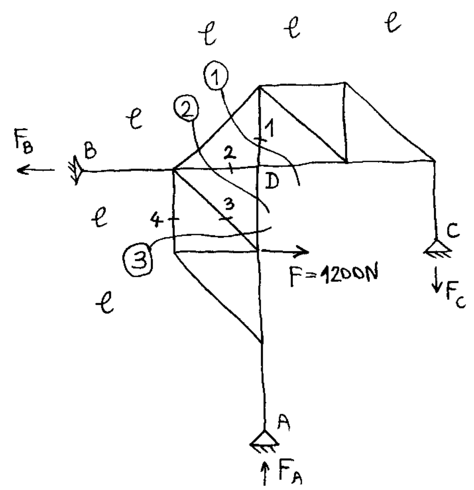
$N_1 = 0$
$N_2 = -F$ (ny)
$N_3 = 0$
$N_4 = +F$ (h)
$N_5 = -\sqrt{2}F$ (ny)
$N_6 = 0$
$N_7 = -2F$ (ny)
$N_8 = +\sqrt{2}F$ (h)
$N_9 = -F$ (ny)
$N_{10} = +F$ (h)
$N_{11} = -\sqrt{2}F$ (ny)
$N_{12} = -3F$ (ny)
$N_{13} = +F$ (h)
$N_{14} = +3F$ (h)
$N_{15} = -2\sqrt{2}F$ (ny)
$N_{16} = -4F$ (ny)

Megjegyzés:
Vakrúdként csak az 1-es rudat tudtuk azonosítani. A 3-asról és a 6-osról csak a számítás során derült ki, hogy nem ébred bennük erő.

Átmetsző módszer

6. példa: Számítsuk ki a bejelölt rudakban ébredő erőket!

1998.07.02. 3A



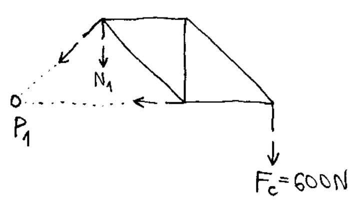
$\sum F_x = 0 \rightarrow F_B = F = 1200\,N\ (\leftarrow)$

$\sum M_D = 0 = F \cdot \ell - F_c \cdot 2\ell$

$F_c = \frac{1}{2} F = 600\,N\ (\downarrow)$

$\sum F_y = 0 \rightarrow F_A = F_c = 600\,N\ (\downarrow)$

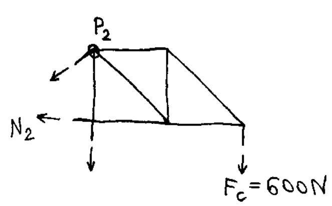
1



$\sum M_{P_1} = 0 = -N_1 \ell - F_c \cdot 3\ell$

$\boxed{N_1 = -3F_c = -3 \cdot 600 = -1800\,N\ (ny)}$

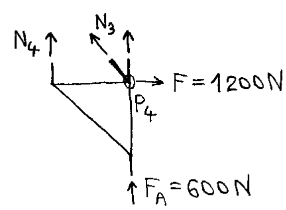
2



$\sum M_{P_2} = 0 = -N_2 \cdot \ell - F_c \cdot 2\ell$

$\boxed{N_2 = -2F_c = -2 \cdot 600 = -1200\,N\ (ny)}$

3



$\sum F_x = 0 = -N_{3x} + F = -N_3 \frac{1}{\sqrt{2}} + F$

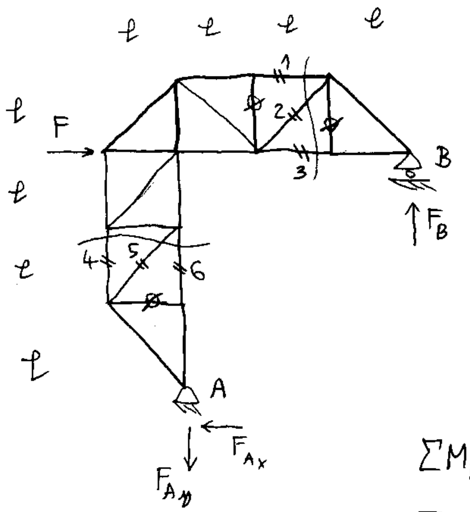
$\boxed{N_3 = \sqrt{2} F = 1200\sqrt{2} = +1697\,N\ (h)}$

$\sum M_{P_4} = 0 = -N_4 \cdot \ell$

$\boxed{N_4 = 0}$

7. példa:

Számítsuk ki a bejelölt rudakban ébredő erőket!

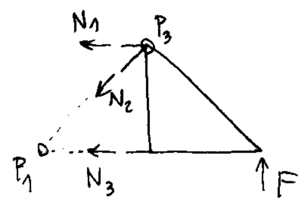


$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{Ax} = F \ (\leftarrow)$

$\sum M_A = 0 = -F \cdot 3\ell + F_B \cdot 3\ell$

$F_B = F \ (\uparrow)$

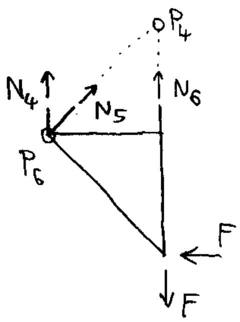
$\sum F_y = 0 = -F_{Ay} + F_B \rightarrow F_{Ay} = F \ (\downarrow)$



$\sum M_{P_3} = 0 = -N_3 \ell + F\ell \rightarrow \boxed{N_3 = F \ (h)}$

$\sum M_{P_1} = 0 = N_1 \ell + F \cdot 2\ell \rightarrow \boxed{N_1 = -2F \ (ny)}$

$\sum F_y = 0 = -N_2 \frac{1}{\sqrt{2}} + F \rightarrow \boxed{N_2 = \sqrt{2} F \ (h)}$



$\sum M_{P_6} = 0 = N_6 \ell - F\ell - F\ell \rightarrow \boxed{N_6 = 2F \ (h)}$

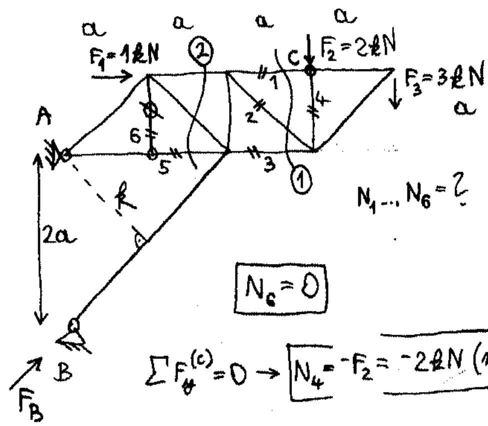
$\sum M_{P_4} = 0 = -N_4 \ell - F \cdot 2\ell \rightarrow \boxed{N_4 = -2F \ (ny)}$

$\sum F_x = 0 = N_5 \frac{1}{\sqrt{2}} - F \rightarrow \boxed{N_5 = \sqrt{2} F \ (h)}$

8. példa:

Számítsuk ki a bejelölt rudakban ébredő erőket!

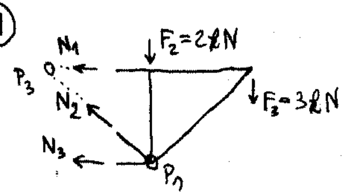
Az N_1 - N_4 rúderők meghatározásához nincs szükség a reakcióerők kiszámítására, a 6. rúd pedig vakrúd. Az 5. rúdban ébredő erő kiszámításához már ki kell számolni valamelyik reakcióerőt. Az F_B kiszámítását választjuk, és kihasználjuk, hogy rúdirányú, azaz 45°-os lesz. Az átmetszésnél most igaz, hogy az F_B erő karja éppen a négyzet átlója.



$$\boxed{N_6 = 0}$$

$$\sum F_y^{(c)} = 0 \rightarrow \boxed{N_4 = -F_2 = -2\,kN\ (ny)}$$

1



$$\sum M_{P_1} = 0 = N_1 a - F_3 a \rightarrow \boxed{N_1 = F_3 = +3\,kN\ (h)}$$

$$\sum M_{P_3} = 0 = -N_3 a - F_2 a - F_3 \cdot 2a$$

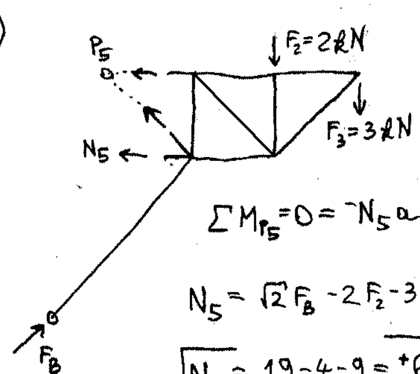
$$\boxed{N_3 = -F_2 - 2F_3 = -2 - 2\cdot 3 = -8\,kN\ (ny)}$$

$$\sum F_y = 0 = N_2 \frac{1}{\sqrt{2}} - F_2 - F_3 \rightarrow \boxed{N_2 = \sqrt{2}(F_2+F_3) = \sqrt{2}(2+3) = +5\sqrt{2}\,kN = +7{,}07\,kN\ (h)}$$

$$\sum M_A = 0 = F_B \cdot k - F_1 a - F_2 \cdot 3a - F_3 \cdot 4a = F_B \frac{2a}{\sqrt{2}} - F_1 a - F_2 \cdot 3a - F_3 \cdot 4a$$

$$\boxed{F_B = \frac{\sqrt{2}}{2}(F_1 + 3F_2 + 4F_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3) = \frac{19}{2}\sqrt{2}\,kN = 13{,}44\,kN\ (\nearrow)}$$

2



$$\sum M_{P_5} = 0 = -N_5 a + F_B \sqrt{2} a - F_2 \cdot 2a - F_3 \cdot 3a$$

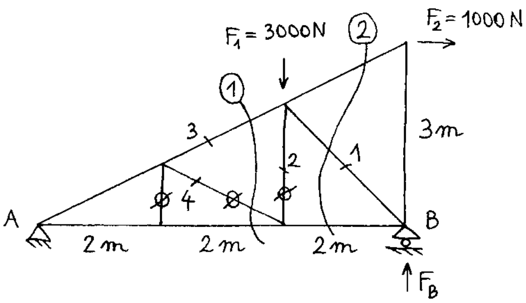
$$N_5 = \sqrt{2} F_B - 2F_2 - 3F_3 = \sqrt{2}\,\frac{19}{2}\sqrt{2} - 2\cdot 2 - 3\cdot 3$$

$$\boxed{N_5 = 19 - 4 - 9 = +6\,kN\ (h)}$$

9. példa:

Számítsuk ki a bejelölt rudakban ébredő erőket!

Itt az 1-es átmetszésnél elegendő erőegyensúllyal számolni, ha már rájöttünk, hogy a 4-es rúd vakrúd. Ha nem, akkor az 1-es átmetszésnél nyomatéki egyenleteket is felírhatunk a P_3 és P_4 főpontra.

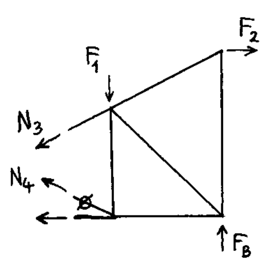


Vakrudak keresése: $\boxed{N_4 = 0}$ $\boxed{N_2 = 0}$

$$\sum M_A = 0 = -F_1 \cdot 4 - F_2 \cdot 3 + F_B \cdot 6$$

$$F_B = \frac{4F_1 + 3F_2}{6} = \frac{4 \cdot 3000 + 3 \cdot 1000}{6} = 2500\,N\ (\uparrow)$$

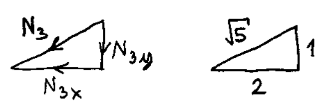
1



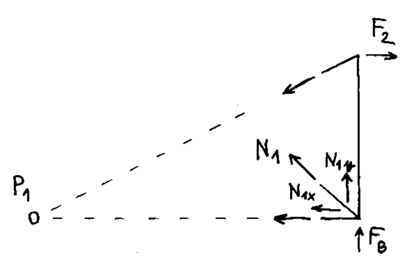
$$\sum F_y = 0 = -N_{3y} - F_1 + F_B = -N_3 \frac{1}{\sqrt{5}} - F_1 + F_B$$

$$\boxed{N_3} = \sqrt{5}(F_B - F_1) = \sqrt{5}(2500 - 3000) =$$

$$= -500\sqrt{5}\,N = \boxed{-1118\,N\ (ny)}$$



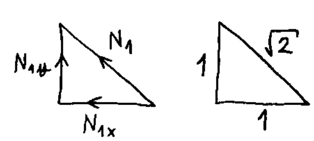
2



$$\sum M_{P_1} = 0 = N_{1y} \cdot 6 + F_B \cdot 6 - F_2 \cdot 3 = N_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 6 + F_B \cdot 6 - F_2 \cdot 3$$

$$\boxed{N_1} = \frac{\sqrt{2}}{6}(3F_2 - 6F_B) = \frac{\sqrt{2}}{6}(3 \cdot 1000 - 6 \cdot 2500) =$$

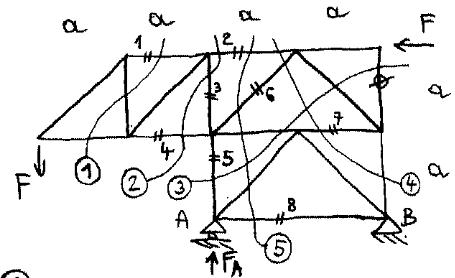
$$= -2000\sqrt{2}\,N = \boxed{-2828\,N\ (ny)}$$



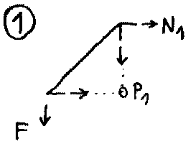
10. példa: Az 5-8. rudak számítása elég nehéz.

Számítsuk ki a bejelölt rudakban ébredő erőket!

Itt a 3-as számú átmetszés csak látszólag metsz el négy rudat, mert közülük az egyik vakrúd. A 4-es metszésben viszont tényleg négy rudat metszünk át, de közülük csak három rúderő ismeretlen. Az 5-ös metszésnél öt rudat metszünk el, de kettőben már ismert a rúderő.

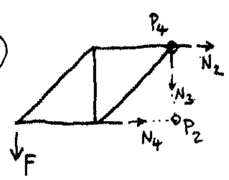


1



$\sum M_{P_1}=0=-N_1 a+Fa \rightarrow \boxed{N_1=F\ (h)}$

2

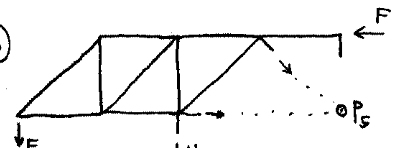


$\sum M_{P_2}=0=-N_2 a+F\cdot 2a \rightarrow \boxed{N_2=2F\ (h)}$

$\sum M_{P_4}=0=N_4 a+F\cdot 2a \rightarrow \boxed{N_4=-2F\ (ny)}$

$\sum F_y=0=-N_3-F \rightarrow \boxed{N_3=-F\ (ny)}$

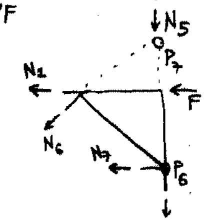
3



$\sum M_{P_5}=0=N_5\cdot 2a+F\cdot 4a+Fa$

$\boxed{N_5=\frac{-5}{2}F\ (ny)}$

4



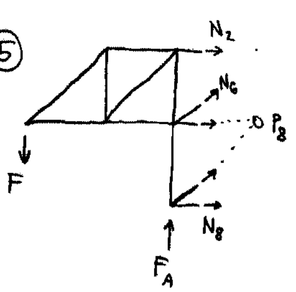
$\sum M_{P_6}=0=N_2 a+N_6\sqrt{2}a+Fa$

$\boxed{N_6=\frac{-N_2-F}{\sqrt{2}}=\frac{-(2F)-F}{\sqrt{2}}=\frac{-3}{\sqrt{2}}F=\frac{-3\sqrt{2}}{2}F\ (ny)}$

$\sum M_{P_7}=0=-N_2 a-N_7\cdot 2a-Fa$

$\boxed{N_7=\frac{-N_2-F}{2}=\frac{-(2F)-F}{2}=\frac{-3}{2}F\ (ny)}$

5



$\sum M_B=0=F\cdot 4a+F\cdot 2a-F_A\cdot 2a$

$F_A=3F\ (\uparrow)$

$\sum M_{P_8}=0=-N_2 a-N_6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a+N_8 a+F\cdot 3a-F_A a$

$N_8=N_2+\frac{\sqrt{2}}{2}N_6+3F+F_A$

$N_8=2F+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}F\right)+3F-3F$

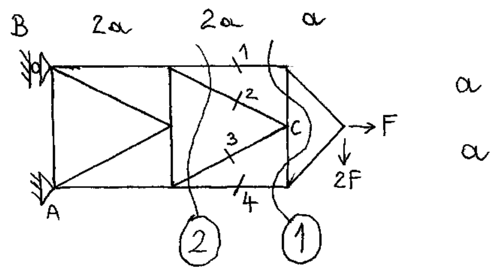
$\boxed{N_8=\frac{1}{2}F\ (h)}$

K-rácsozat

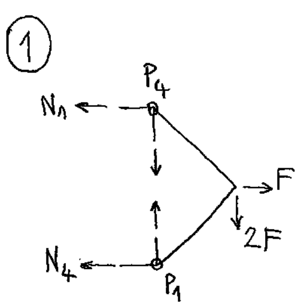
Az elméletet egy példa segítségével tekintjük át:

11. példa: A 2010.03.25.-ei gyakorlat 1. feladata.

Sajnos a K-rácsozatot nem lehet 3 rúd elmetszésével két különálló részre bontani. Ezért két darab 4-es metszést kell csinálni.



Elsőként úgy metszünk, hogy a metszés kikerülje a K-blokk középső C pontját:
Ekkor az elmetszett függőleges rudak egy egyenesbe esnek, ezért mindkettő hatásvonala átmegy a P1 és P4 főponton is. Ez azt jelenti hogy egyiküknek sincs nyomatéka ezekre a pontokra. Így az N1 és N4 rúderők ugyanúgy számolhatók a nyomatéki egyenletekből, mintha csak 3 rudat metszettünk volna át.



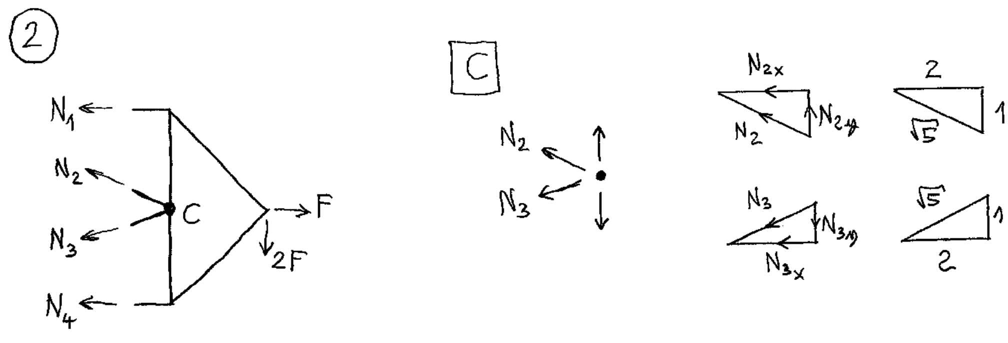
$$\sum M_{P_1} = 0 = N_1 \cdot 2a - F \cdot a - 2F \cdot a$$

$$\boxed{N_1 = +\frac{3}{2} F \ (h)}$$

$$\sum M_{P_4} = 0 = -N_4 \cdot 2a + F \cdot a - 2F \cdot a$$

$$\boxed{N_4 = -\frac{1}{2} F \ (ny)}$$

A második esetben simán átvágjuk a K-blokkot:
Ekkor kicsit bonyolultabb a helyzet, mint az előbb, mert két összefüggő egyenletet kell felírnunk, és megoldanunk. Először felírunk egy függőleges irányú erőegyensúlyt a fél szerkezetre. Ebben N1 és N2 nem szerepel, mivel ezek a rúderők vízszintesek. Sajnos még így is két ismeretlenünk lesz, mert N2-nek és N3-nak is van függőleges komponense.
A második egyenletet úgy kapjuk meg, hogy megvizsgáljuk a K-blokk középső C pontjának a vízszintes egyensúlyát. Ebben a C pontba befutó függőleges rudak ereje nem szerepel, csak N2 és N3 vízszintes komponense.



1.) $\sum F_y = 0 = N_{2y} - N_{3y} - 2F =$

$= N_2 \frac{1}{\sqrt{5}} - N_3 \frac{1}{\sqrt{5}} - 2F$

2.) $\sum F_x^{(c)} = 0 = -N_{2x} - N_{3x} =$

$= -N_2 \frac{2}{\sqrt{5}} - N_3 \frac{2}{\sqrt{5}}$

A komponenseket mindkét egyenletben az eredőkkel felírva (a szokásos háromszöges eljárással) a két egyenlet együtt már megoldható. Célszerű a másodikból kifejezni az egyik ismeretlent, és behelyettesíteni az elsőbe.

2.) $N_3 = -N_2$

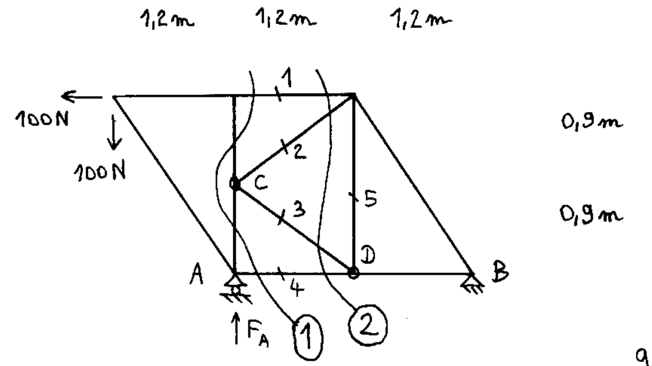
2→1.) $0 = N_2 \frac{1}{\sqrt{5}} - (-N_2) \frac{1}{\sqrt{5}} - 2F$

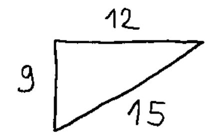
$\boxed{N_2 = +\sqrt{5} F \ (h)}$

2.) $\boxed{N_3 = -\sqrt{5} F \ (ny)}$

Ha a K-blokk nem ilyen szép szimmetrikus, akkor kicsit nehezebb a számítás, de a megoldás ugyanilyen. A gyakorlatban (és tapasztalataim alapján a vizsgában) se szokott előfordulni aszimmetrikus K-rácsozat.

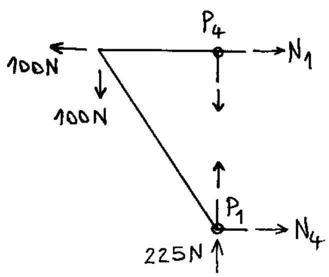
12. példa: Számítsuk ki a bejelölt rudakban ébredő erőket!





$$\sum M_B = 0 = 100 \cdot 1{,}8 + 100 \cdot 3{,}6 - F_A \cdot 2{,}4$$

$$\boxed{F_A = \frac{180+360}{2{,}4} = 225\ \text{N}\ (\uparrow)}$$

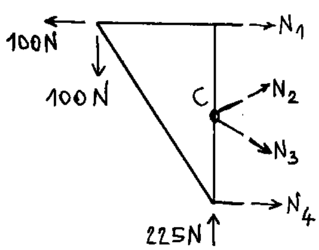


$$\sum M_{P_1} = 0 = -N_1 \cdot 1{,}8 + 100 \cdot 1{,}8 + 100 \cdot 1{,}2$$

$$\boxed{N_1 = \frac{180+120}{1{,}8} = 166{,}7\ \text{N}\ (h)}$$

$$\sum M_{P_4} = 0 = N_4 \cdot 1{,}8 + 100 \cdot 1{,}2$$

$$\boxed{N_4 = -100\,\frac{1{,}2}{1{,}8} = -66{,}7\ \text{N}\ (ny)}$$



$$1.)\ \sum F_y = 0 = N_2\,\frac{9}{15} - N_3\,\frac{9}{15} - 100 + 225$$

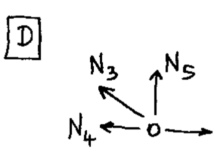
$$2.)\ \sum F_x^{(C)} = 0 = N_2\,\frac{12}{15} + N_3\,\frac{12}{15}$$

$$2.)\ N_3 = -N_2$$

$$2 \rightarrow 1.)\ 0 = N_2\,\frac{9}{15} - (-N_2)\,\frac{9}{15} + 125$$

$$\boxed{N_2 = \frac{-125}{2}\,\frac{15}{9} = -104{,}2\ \text{N}\ (ny)}$$

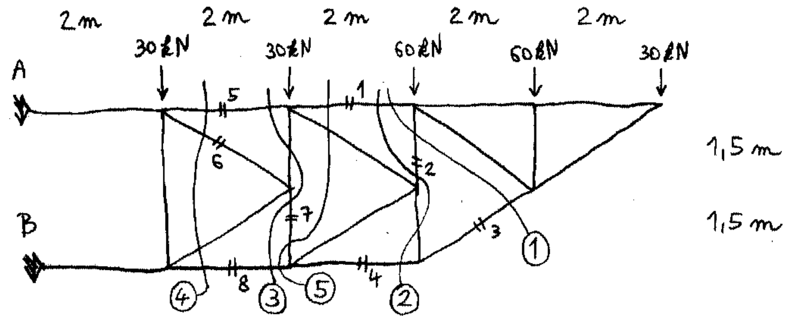
$$2.)\ \boxed{N_3 = +104{,}2\ \text{N}\ (h)}$$



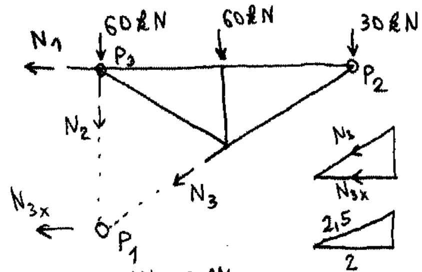
$$\sum F_y^{(D)} = 0 = N_3\,\frac{9}{15} + N_5$$

$$\boxed{N_5 = \frac{-3}{5}\,N_3 = \frac{-3}{5}(+104{,}2) = -62{,}5\ \text{N}\ (ny)}$$

13. példa: Számítsuk ki a bejelölt rudakban ébredő erőket!



①



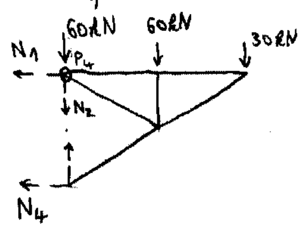
$\sum M_{P_2}=0=N_2\cdot 4+60\cdot 4+60\cdot 2 \rightarrow \boxed{N_2=-90\text{ kN (ny)}}$

$\sum M_{P_3}=0=-N_3\frac{2}{2,5}\cdot 3-60\cdot 2-30\cdot 4$

$\boxed{N_3=-100\text{ kN (ny)}}$

$\sum M_{P_1}=0=N_1\cdot 3-60\cdot 2-30\cdot 4 \rightarrow \boxed{N_1=80\text{ kN (h)}}$

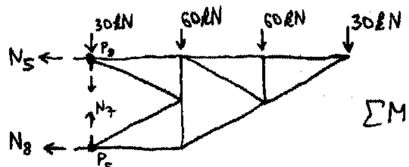
②



$\sum M_{P_4}=0=-N_4\cdot 3-60\cdot 2-30\cdot 4$

$\boxed{N_4=-80\text{ kN (ny)}}$

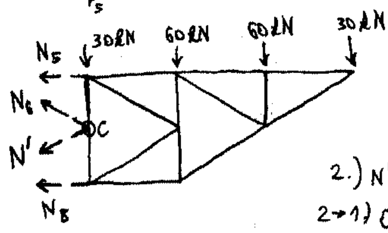
③



$\sum M_{P_5}=0=N_5\cdot 3-60\cdot 2-60\cdot 4-30\cdot 6 \rightarrow \boxed{N_5=180\text{ kN (h)}}$

$\sum M_{P_8}=0=-N_8\cdot 3-60\cdot 2-60\cdot 4-30\cdot 6 \rightarrow \boxed{N_8=-180\text{ kN (ny)}}$

④



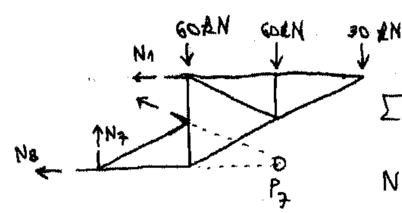
1.) $\sum F_y=0=N_6\frac{1,5}{2,5}-30-60-60-30-N'\frac{1,5}{2,5}$

2.) $\sum F_x^{(c)}=0=-N_6\frac{2}{2,5}-N'\frac{2}{2,5}$

2.) $N'=-N_6$

2→1) $0=2N_6\frac{1,5}{2,5}-180 \rightarrow \boxed{N_6=150\text{ kN (h)}}$

⑤



$\sum M_{P_7}=0=N_1\cdot 3-N_7\cdot 4+60\cdot 2-30\cdot 2$

$N_7=\frac{3}{4}N_1+\frac{60}{2}-\frac{30}{2}=\frac{3}{4}(80)+15$

$\boxed{N_7=75\text{ kN (h)}}$

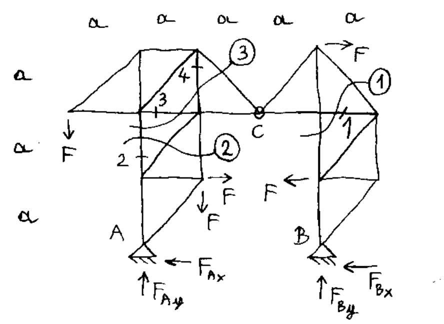
Összetett (csuklós és rácsos) feladatok

14. példa: Összetett (csuklós és rácsos) feladat.

Számítsuk ki a rúderőket!

Először csuklós szerkezetként kiszámítjuk a reakcióerőket, majd jöhetnek az átmetszések.

1998.06.16. 3B Ø



$$\sum M_A = 0 = Fa - Fa - Fa + Fa - F\cdot 3a + F_{By}\cdot 3a$$

$$F_{By} = F\ (\uparrow)$$

$$\sum M_B = 0 = F\cdot 4a + F\cdot 2a - Fa + Fa - F\cdot 3a - F_{Ay}\cdot 3a$$

$$F_{Ay} = F\ (\uparrow)$$

$$\sum F_y = -F + F_{Ay} - F + F_{By} = 0 \quad \checkmark \text{ OK}$$

$$\sum M_C^{(bal)} = 0 = F\cdot 3a + Fa + Fa - F_{Ay}\cdot 2a - F_{Ax}\cdot 2a$$

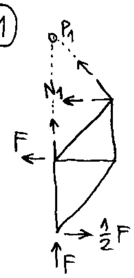
$$F_{Ax} = \frac{5F - 2F}{2} = \frac{3}{2}F\ (\leftarrow)$$

$$\sum M_C^{(jobb)} = 0 = -Fa - Fa - F_{Bx}\cdot 2a + F_{By}\, a$$

$$F_{Bx} = \frac{-2F + F}{2} = -\frac{1}{2}F\ (\rightarrow)$$

$$\sum F_x = F - F + F - F_{Ax} - F_{Bx} = F - \left(\frac{3}{2}F\right) - \left(-\frac{1}{2}F\right) = 0 \quad \checkmark \text{ OK}$$

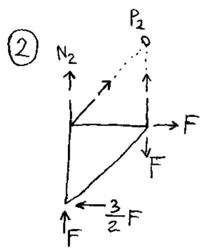
(1)



$$\sum M_{P_1} = 0 = -F\cdot 2a + \frac{1}{2}F\cdot 3a - N_1 a$$

$$\boxed{N_1 = -\frac{1}{2}F\ (ny)}$$

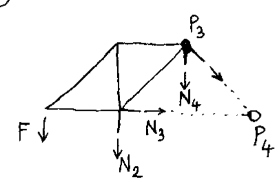
(2)



$$\sum M_{P_2} = 0 = Fa - Fa - \frac{3}{2}F\cdot 2a - N_2 a$$

$$\boxed{N_2 = -3F\ (ny)}$$

(3)



$$\sum M_{P_3} = 0 = F\cdot 2a + N_2 a + N_3 a$$

$$\boxed{N_3 = -2F - (-3F) = +F\ (h)}$$

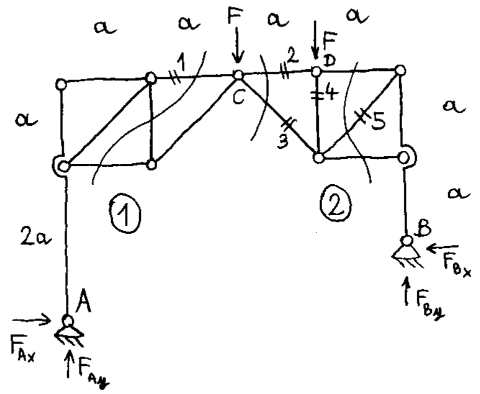
$$\sum M_{P_4} = 0 = F\cdot 3a + N_2\cdot 2a + N_4 a$$

$$\boxed{N_4 = -3F - 2(-3F) = +3F\ (h)}$$

15. példa: Összetett (csuklós és rácsos) feladat.

A szélső függőleges rudak a belső csatlakozásnál merevek. A reakciókat itt is csuklós szerkezetként kell számítani, aztán már ez is rácsos.

2001.05.31. 3B M



reakciók?
rúderők?

1.) $\sum M_B = 0 = F_{Ax}\cdot a - F_{Ay}\cdot 4a + F\cdot 2a + F\cdot a$

2.) $\sum M_C^{(1)} = 0 = F_{Ax}\cdot 3a - F_{Ay}\cdot 2a$

2.) $F_{Ax} = \frac{2}{3} F_{Ay}$

2→1.) $0 = \frac{2}{3} F_{Ay} - 4F_{Ay} + 3F$

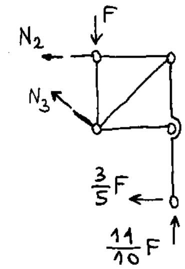
$\boxed{F_{Ay} = \frac{9}{10} F\ (\uparrow)}$

2.) $\boxed{F_{Ax} = \frac{2}{3}\,\frac{9}{10} F = \frac{3}{5} F\ (\rightarrow)}$

$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{F_{Bx} = F_{Ax} = \frac{3}{5} F\ (\leftarrow)}$

$\sum F_y = 0 = F_{Ay} - F - F + F_{By}$

$\boxed{F_{By} = 2F - \frac{9}{10} F = \frac{11}{10} F\ (\uparrow)}$



$\sum F_y = N_3 \frac{1}{\sqrt{2}} - F + \frac{11}{10} F$

$\boxed{N_3 = -\frac{\sqrt{2}}{10} F\ (\text{ny})}$

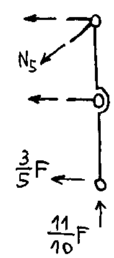
$\sum F_x = 0 = -N_2 - N_3 \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{5} F$

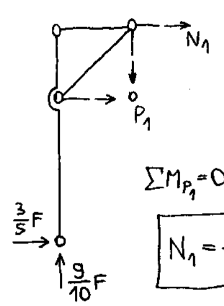
$\boxed{N_2 = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{10} F\right)\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{5} F = -\frac{1}{2} F\ (\text{ny})}$

$\sum F_y^{(D)} = 0 \rightarrow \boxed{F_4 = F\ (\text{ny})}$

$\sum F_y = 0 = -N_5 \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{11}{10} F$

$\boxed{N_5 = \frac{11}{10}\sqrt{2}\, F\ (\text{h})}$





$\sum M_{P_1} = 0 = -N_1 a + \frac{3}{5} F\cdot 2a - \frac{9}{10} F a$

$\boxed{N_1 = \frac{+3}{10} F\ (\text{h})}$