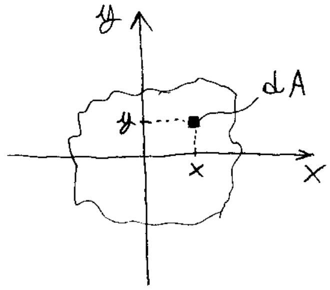
Egy kis elmélet



$$I_x = \int_{(A)} y^2 \, dA$$

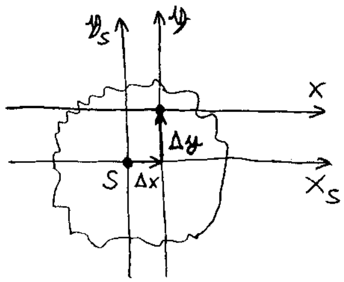
$$I_y = \int_{(A)} x^2 \, dA$$

$$I_{xy} = \int_{(A)} xy \, dA$$

$$I_p = I_x + I_y$$

$$\underline{\underline{I}}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix}$$

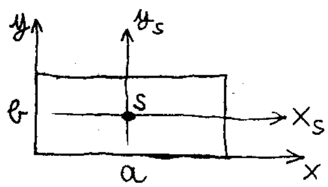
STEINER tétel:



$$I_x = I_{x_s} + \Delta y^2 \cdot A$$

$$I_y = I_{y_s} + \Delta x^2 \cdot A$$

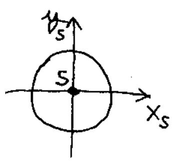
$$I_{xy} = I_{x_s y_s} + \Delta x \cdot \Delta y \cdot A$$



$$I_x = \frac{a b^3}{3} \qquad I_{x_s} = \frac{a b^3}{12}$$

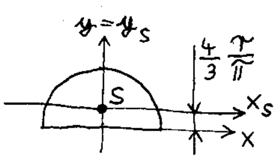
$$I_y = \frac{a^3 b}{3} \qquad I_{y_s} = \frac{a^3 b}{12}$$

$$I_{xy} = \frac{a^2 b^2}{4} \qquad I_{x_s y_s} = 0$$



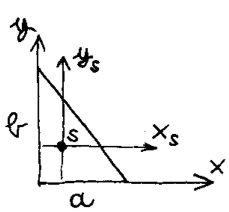
$$I_{x_s} = I_{y_s} = \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{r^4 \pi}{4}$$

$$I_{x_s y_s} = 0$$



$$I_x = I_y = I_{y_s} = \frac{d^4 \pi}{128} = \frac{r^4 \pi}{8}$$

$$I_{x_s} = \frac{r^4 \pi}{8} - \left(\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)^2 \frac{r^2 \pi}{2}$$



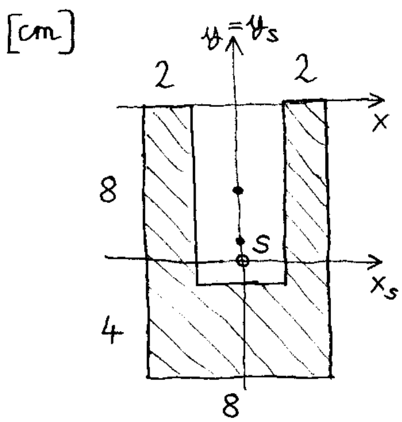
$$I_x = \frac{a b^3}{12} \qquad I_{x_s} = \frac{a b^3}{36}$$

$$I_y = \frac{a^3 b}{12} \qquad I_{y_s} = \frac{a^3 b}{36}$$

$$I_{xy} = \frac{a^2 b^2}{24} \qquad I_{x_s y_s} = \frac{-a^2 b^2}{72}$$

1. példa:

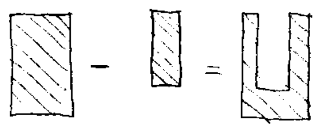
Számítsuk ki a súlyponti x és y tengelyekre számított másodrendű nyomatékokat!



$I_{x_s} = ?$

$I_{y_s} = ?$

$I_{x_s y_s} = ?$



$x_s = 0 \leftarrow$ szimmetria

$$y_s = \frac{+(-6)\cdot 8\cdot 12 - (-4)\cdot 4\cdot 8}{+8\cdot 12 - 4\cdot 8} = \frac{-448}{64} = -7\ cm$$

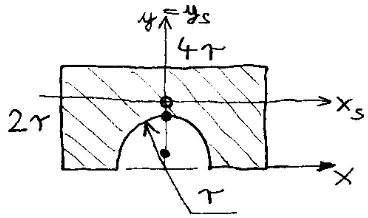
$$\boxed{I_{x_s} = \underbrace{\frac{12^3\cdot 8}{3} - \frac{8^3\cdot 4}{3}}_{I_x} \underbrace{- 7^2\cdot 64}_{ST_{x\to x_s}} = 789{,}3\ cm^4}$$

$$\boxed{I_{y_s} = I_y = \frac{8^3\cdot 12}{12} - \frac{4^3\cdot 8}{12} = 469{,}3\ cm^4}$$

$$\boxed{I_{x_s y_s} = 0} \leftarrow \text{szimmetria}$$

2. példa:

Írjuk fel a súlyponti másodrendű nyomatéki tenzort!



$$\underline{\underline{I}}_s = ?$$

$x_s = 0$ ← szimmetria

$$y_s = \frac{+(r)\cdot 4r\cdot 2r - \left(\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)\cdot\frac{r^2\pi}{2}}{4r\cdot 2r - \frac{r^2\pi}{2}} = \frac{+7{,}333\, r^3}{6{,}429\, r^2} = 1{,}141\, r$$

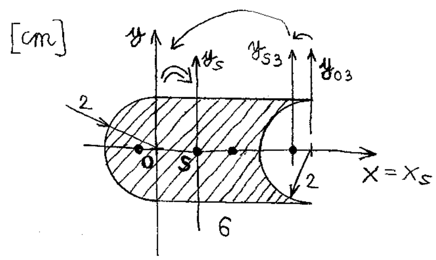
$$\boxed{I_{x_s} = \underbrace{\frac{(2r)^3\cdot 4r}{3} - \frac{r^4\pi}{8}}_{I_x} \underbrace{-(1{,}141 r)^2\cdot 6{,}429 r^2}_{ST_{x\to x_s}} = 1{,}904\, r^4}$$

$$\boxed{I_{y_s} = I_y = \frac{(4r)^3\cdot 2r}{12} - \frac{r^4\pi}{8} = 10{,}27\, r^4}$$

$\boxed{I_{x_s y_s} = 0}$ ← szimmetria

$$\underline{\underline{I}}_s = \begin{bmatrix} 1{,}904 & 0 \\ 0 & 10{,}27 \end{bmatrix} r^4$$

3. példa: Számítsuk ki az O ponton átmenő x-y tengelyekre vett ekvatoriális és centrifugális másodrendű nyomatékokat! Számítsuk ki a súlyponton átmenő x_S-y_S tengelyekre vett ekvatoriális és centrifugális másodrendű nyomatékokat is!



$$I_x = \frac{4^3 \cdot 6}{12} = 32\ cm^4$$

$$I_y = \frac{2^4\pi}{8} + \frac{6^3 \cdot 4}{3} - \underbrace{\left[\underbrace{\underbrace{\frac{2^4\pi}{8}}_{I^{(3)}_{y_{03}}} - \underbrace{\left(\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{2^2\pi}{2}}_{ST^{(3)}_{y_{03} \to y_{S3}}}}_{I^{(3)}_{y_{S3}}} + \underbrace{\left(6 - \frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{2^2\pi}{2}}_{ST^{(3)}_{y_{S3} \to y}} \right]}_{I^{(3)}_y} = 125{,}8\ cm^4$$

$$I_{xy} = 0 \leftarrow x \text{ szimmetriatengely}$$

$$x_S = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{+\left(-\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)\frac{2^2\pi}{2} + (+3)\cdot 6 \cdot 4 - \left(+6 - \frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)\cdot\frac{2^2\pi}{2}}{+\frac{2^2\pi}{2} + 6 \cdot 4 - \frac{2^2\pi}{2}} = \frac{+34{,}30}{24} = +1{,}429\ cm$$

$$y_S = 0 \leftarrow \text{szimmetria}$$

$$I_{x_S} = I_x = 32\ cm^4$$

$$I_{y_S} = I_y - x_S^2 \cdot A = 125{,}8 - 1{,}429^2 \cdot 24 = 76{,}79\ cm^4$$

$$I_{x_S y_S} = 0 \leftarrow x_S \text{ szimmetriatengely}$$

Megjegyzés:
A Ix azért számítható ilyen egyszerűen mert a téglalaphoz hozzáadódó és abból kivonódó félkörök másodrendű nyomatéka az x tengelyre egyenlő. Szemléletesen a bal oldali félkörrel a hiányzó rész lefedhető, mivel a tengely menti eltolás nem változtat a tengelyre vett másodrendű nyomaték értékén.
A hiányzó félkör függőleges átmérő tengelyére számolt másodrendű nyomaték nem vihető át közvetlenül az y tengelyre, mivel a Steiner-tétel csak súlyponti és nem súlyponti tengely között érvényes, két nem súlyponti között nem. Emiatt először át kell térni a hiányzó félkör saját súlyponti tengelyére, majd innen az y tengelyre.
Ha az y tengelyre már kiszámoltuk a másodrendű nyomatékot, az y_S tengelyre a teljes keresztmetszetre felírt Steiner-tétellel térhetünk át.

Egy kis matematika (vektorok és mátrixok két dimenzióban)

A vektorok alapértelmezésben oszlopvektorok:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

Vektor szorzása skalárral:

$$c \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot v_x \\ c \cdot v_y \end{bmatrix}$$

Vektorok skaláris szorzata:

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = u_x v_x + u_y v_y$$

Oszlopvektor transzponáltja (sorvektor):

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix}$$

2x2-es mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Mátrix szorzása skalárral:

$$c \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} \end{bmatrix}$$

Mátrix transzponáltja (transzponálás = tükrözés a főátlóra):

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Mátrix és oszlopvektor szorzata (az eredmény oszlopvektor):

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_x + a_{12}v_y \\ a_{21}v_x + a_{22}v_y \end{bmatrix}$$

Mátrix szorzása vektorokkal mindkét oldalról (az eredmény skalár):

$$r = \mathbf{u}^T \mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}v_x + a_{12}v_y \\ a_{21}v_x + a_{22}v_y \end{bmatrix} = u_x\left(a_{11}v_x + a_{12}v_y\right) + u_y\left(a_{21}v_x + a_{22}v_y\right)$$

Elforgatott tengelyekre számított másodrendű nyomatékok

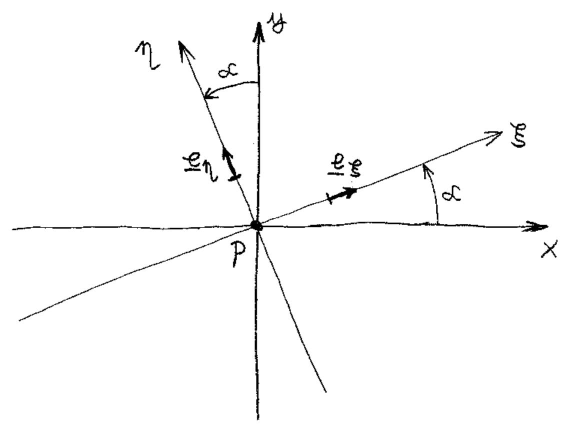
A P ponton átmenő elforgatott $\xi - \eta$ koordinátarendszerhez tartozó másodrendű nyomatékok kiszámítása a P ponton átmenő x-y koordinátarendszerhez tartozó értékekből:

$$I_\xi = \mathbf{e}_\xi^T \, \mathbf{I}_P^{xy} \, \mathbf{e}_\xi$$

$$I_\eta = \mathbf{e}_\eta^T \, \mathbf{I}_P^{xy} \, \mathbf{e}_\eta$$

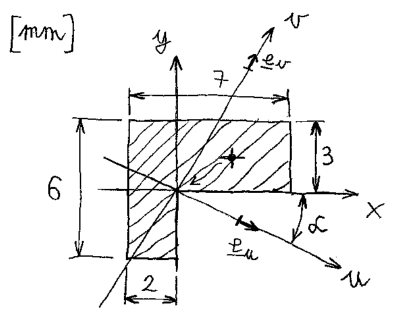
$$I_{\xi\eta} = -\mathbf{e}_\xi^T \, \mathbf{I}_P^{xy} \, \mathbf{e}_\eta = -\mathbf{e}_\eta^T \, \mathbf{I}_P^{xy} \, \mathbf{e}_\xi$$

$$\mathbf{I}_P^{\xi\eta} = \begin{bmatrix} I_\xi & -I_{\xi\eta} \\ -I_{\xi\eta} & I_\eta \end{bmatrix}$$



$\mathbf{e}_\xi$ és $\mathbf{e}_\eta$ az elforgatott tengelyek irányába mutató egységvektorok.

4. példa: Írjuk fel a bejelölt u-v rendszerhez tartozó másodrendű nyomatéki tenzort!



$$\alpha = 30^\circ$$

$$\underline{\underline{I}}_{(u,v)} = ?$$

$$I_x = \frac{3^3 \cdot 7}{3} + \frac{3^3 \cdot 2}{3} = 81\ mm^4$$

$$I_y = \frac{2^3 \cdot 6}{3} + \frac{5^3 \cdot 3}{3} = 141\ mm^4$$

$$I_{xy} = 0 + \left[0 + (-2{,}5)(-1{,}5) \cdot 5 \cdot 3\right] = +56{,}25\ mm^4$$

$$\underline{\underline{I}}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 81 & -56{,}25 \\ -56{,}25 & 141 \end{bmatrix} mm^4$$

$$\underline{e}_u = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ \\ -\sin 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}866 \\ -0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_v = \begin{bmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin 30^\circ \\ \cos 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}866 \end{bmatrix}$$

$$I_u = \underline{e}_u^T \underline{\underline{I}}_{(x,y)} \underline{e}_u = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 81 & -56{,}25 \\ -56{,}25 & 141 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}866 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 98{,}27 \\ -119{,}2 \end{bmatrix} = 144{,}7\ mm^4$$

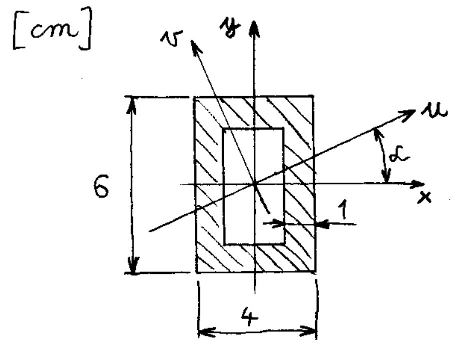
$$I_v = \underline{e}_v^T \underline{\underline{I}}_{(x,y)} \underline{e}_v = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 81 & -56{,}25 \\ -56{,}25 & 141 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}866 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8{,}213 \\ 93{,}98 \end{bmatrix} = 77{,}28\ mm^4$$

$$I_{uv} = -\underline{e}_u^T \underline{\underline{I}}_{(x,y)} \underline{e}_v = -\begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8{,}213 \\ 93{,}98 \end{bmatrix} = +54{,}10\ mm^4$$

$$\underline{\underline{I}}_{(u,v)} = \begin{bmatrix} I_u & -I_{uv} \\ -I_{uv} & I_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 144{,}7 & -54{,}1 \\ -54{,}1 & 77{,}28 \end{bmatrix} mm^4$$

5. példa: Írjuk fel a másodrendű nyomatéki tenzort a bejelölt u-v koordinátarendszerben!



$\alpha = 30°$

$\underline{\underline{I}}_{(u,v)} = ?$

$$I_x = \frac{6^3 \cdot 4}{12} - \frac{4^3 \cdot 2}{12} = 61{,}33 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{4^3 \cdot 6}{12} - \frac{2^3 \cdot 4}{12} = 29{,}33 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 0$$

$$\underline{\underline{I}}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61{,}33 & 0 \\ 0 & 29{,}33 \end{bmatrix} \text{cm}^4$$

$$\underline{e}_u = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30° \\ \sin 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_v = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin 30° \\ \cos 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$I_u = \underline{e}_u^T \underline{\underline{I}}_{(x,y)} \underline{e}_u = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 61{,}33 & 0 \\ 0 & 29{,}33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 53{,}11 \\ 14{,}67 \end{bmatrix} = 53{,}33 \text{ cm}^4$$

$$I_v = \underline{e}_v^T \underline{\underline{I}}_{(x,y)} \underline{e}_v = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 61{,}33 & 0 \\ 0 & 29{,}33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -30{,}67 \\ 25{,}40 \end{bmatrix} = 37{,}33 \text{ cm}^4$$

$$I_{uv} = -\underline{e}_v^T \underline{\underline{I}}_{(x,y)} \underline{e}_u = -\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 53{,}11 \\ 14{,}67 \end{bmatrix} = +13{,}85 \text{ cm}^4$$

$$\underline{\underline{I}}_{(u,v)} = \begin{bmatrix} I_u & -I_{uv} \\ -I_{uv} & I_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53{,}33 & -13{,}85 \\ -13{,}85 & 37{,}33 \end{bmatrix} \text{cm}^4$$

Még egy kis elmélet:

Fő-másodrendű nyomatékok:

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Az elforgatás szöge:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{-2 I_{xy}}{I_x - I_y}$$

Ezek az összefüggések bármely koordinátarendszerben érvényesek, vagyis a súlypontiban is:

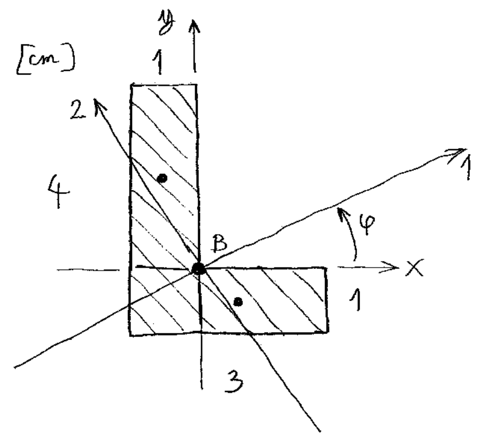
$$I_{1,2} = \frac{I_{xs} + I_{ys}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xs} - I_{ys}}{2}\right)^2 + I_{xsys}^2}$$

Az elforgatás szöge:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{-2 I_{xsys}}{I_{xs} - I_{ys}}$$

6. példa:

Számítsuk ki a súlyponti fő-másodrendű nyomatékokat! Számítsuk ki az x és az 1-es tengely közötti szöget, és ábrázoljuk a főtengelyek helyzetét!



$$I_x = \frac{3^3 \cdot 1}{3} + \frac{1^3 \cdot 3}{3} = 10 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{1^3 \cdot 4}{3} + \frac{2^3 \cdot 1}{3} = 4 \text{ cm}^4$$

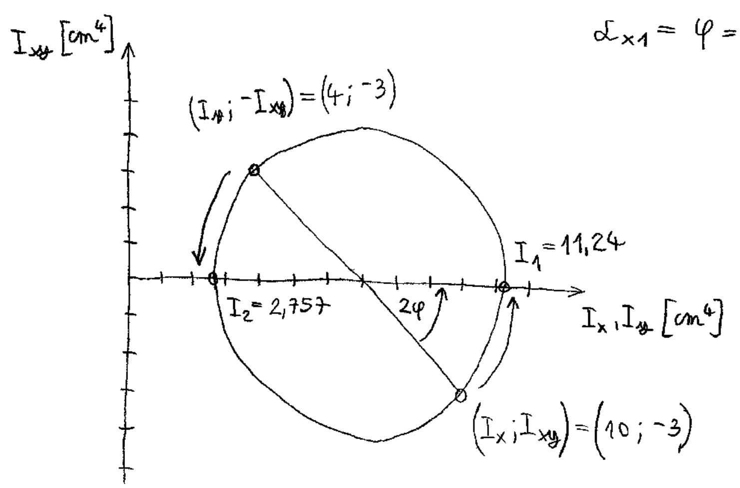
$$I_{xy} = \left[0 + (+0{,}5)(-1{,}5) \cdot 1 \cdot 3\right] + \left[0 + (-0{,}5)(+0{,}5) \cdot 3 \cdot 1\right] = -3 \text{ cm}^4$$

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \frac{10+4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10-4}{2}\right)^2 + (-3)^2} =$$

$$= 7 \pm 4{,}243 = \begin{cases} I_1 = 11{,}24 \text{ cm}^4 \\ I_2 = 2{,}757 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

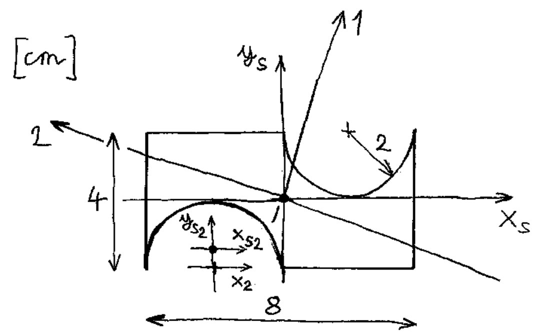
$$\mathrm{tg}\, 2\varphi = \frac{-2 I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{-(-3)}{10-4} = +0{,}5 \longrightarrow \varphi = +13{,}28^\circ$$

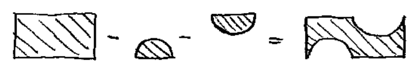
$$\alpha_{x1} = \varphi = +13{,}28^\circ$$



7. példa:

Írjuk fel a súlyponti fő-másodrendű nyomatéki tenzort! Számítsuk ki az x és az 1-es tengely közötti szöget, és ábrázoljuk a főtengelyek helyzetét!





$$I_{x_s}=\underbrace{\frac{4^3\cdot 8}{12}}_{I^{(1)}_{x_s}}-\underbrace{\Bigg[\underbrace{\underbrace{\frac{2^4\pi}{8}}_{I^{(2)}_{x_2}}-\underbrace{\left(\frac{4}{3}\,\frac{2}{\pi}\right)^2\cdot\frac{2^2\pi}{2}}_{ST^{(2)}_{x_2\to x_{s2}}}}_{I^{(2)}_{x_{s2}}}+\underbrace{\left(2-\frac{4}{3}\,\frac{2}{\pi}\right)^2\cdot\frac{2^2\pi}{2}}_{ST^{(2)}_{x_{s2}\to x_s}}\Bigg]}_{I^{(2)}_{x_s}}\cdot 2=22{,}53\ cm^4$$

$$I_{y_s}=\underbrace{\frac{8^3\cdot 4}{12}}_{I^{(1)}_{y_s}}-\underbrace{\Bigg[\underbrace{\frac{2^4\pi}{8}}_{I^{(2)}_{y_{s2}}}+\underbrace{2^2\cdot\frac{2^2\pi}{2}}_{ST^{(2)}_{y_{s2}\to y_s}}\Bigg]}_{I^{(2)}_{y_s}}\cdot 2=107{,}9\ cm^4$$

$$I_{x_s y_s}=\underbrace{0}_{I^{(1)}_{x_s y_s}}-\underbrace{\Bigg[\underbrace{0}_{I^{(2)}_{x_{s2}y_{s2}}}+\underbrace{(+2)\left(+2-\frac{4}{3}\,\frac{2}{\pi}\right)\frac{2^2\pi}{2}}_{ST^{(2)}_{x_{s2}y_{s2}\to x_s y_s}}\Bigg]}_{I^{(2)}_{x_s y_s}}\cdot 2=-28{,}91\ cm^4$$

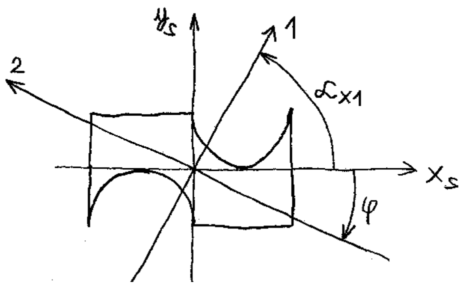
Megjegyzés:
A félkörök másodrendű nyomatékát az x_S tengelyre csak két Steiner-taggal tudjuk átszámítani. Ennek oka, hogy a Steiner-tétel két nem súlyponti tengely között nem alkalmazható. Így az átmérő tengelyről először át kell menni a saját súlyponti tengelyre, majd innen kell tovább menni a közös súlyponti tengelyre, ami a félkörnek szintén nem súlyponti tengelye.
A 2-es szorzók a félkörök szimmetrikus helyzete miatt használhatók.

$$I_{1,2}=\frac{I_{x_s}+I_{y_s}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_{x_s}-I_{y_s}}{2}\right)^2+I_{x_sy_s}^2}=\frac{22{,}53+107{,}9}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{22{,}53-107{,}9}{2}\right)^2+\left(^-28{,}91\right)^2}=$$

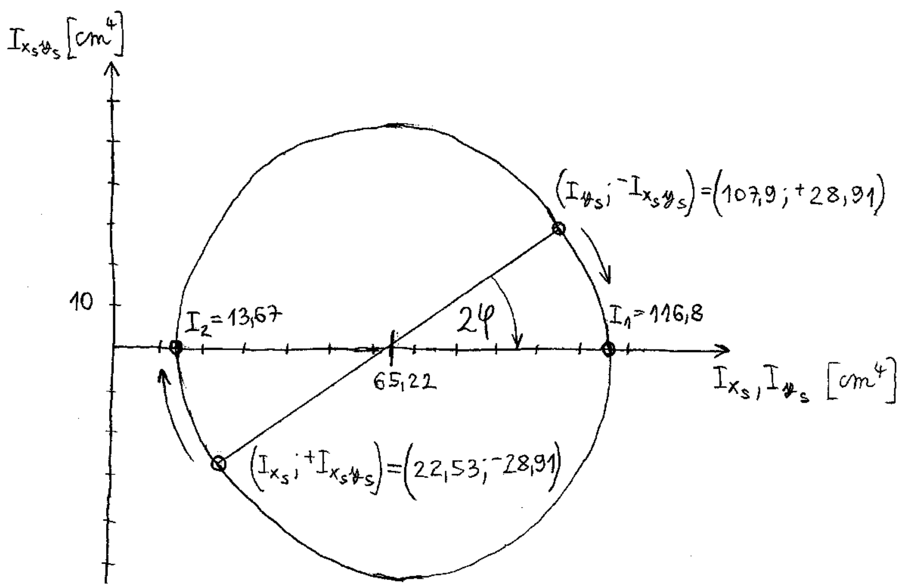
$$=65{,}22\pm51{,}55=\begin{cases}I_1=116{,}8\ cm^4\\ I_2=13{,}67\ cm^4\end{cases}$$

$$\underline{\underline{I}}_{(1,2)}=\begin{bmatrix}I_1 & 0\\ 0 & I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}116{,}8 & 0\\ 0 & 13{,}67\end{bmatrix}cm^4$$

$$tg\,2\varphi=\frac{-2\,I_{x_sy_s}}{I_{x_s}-I_{y_s}}=\frac{-2\cdot(-28{,}91)}{22{,}53-107{,}9}=^-0{,}6773\longrightarrow\varphi=^-34{,}11^\circ$$

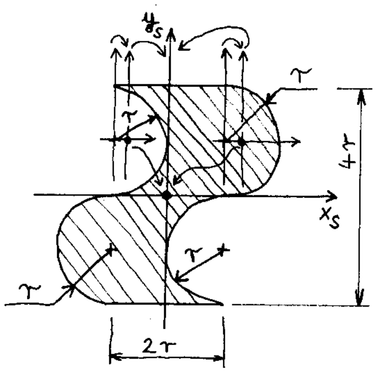


$$\alpha_{x1}=90^\circ-\varphi=90-34{,}11=^+55{,}89^\circ$$

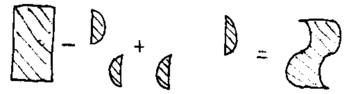


8. példa:

Számítsuk ki a súlyponti fő-másodrendű nyomatékokat! Számítsuk ki a főtengelyek szöghelyzetét, és ábrázoljuk elhelyezkedésüket!



Súlyponti fő-másodrendű nyomatékok: $I_{1,2} = ?$
Főtengelyek helyzete? (rajz)
Mohr-kör?



$$I_{x_s} = \frac{(4r)^3 \cdot 2r}{12} = 10{,}67\, r^4$$

$$I_{y_s} = \frac{(2r)^3 \cdot 4r}{12} - 2\left[\underbrace{\frac{r^4\pi}{8} - \left(\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)^2 \frac{r^2\pi}{2}} + \left(r - \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)\frac{r^2\pi}{2}\right] + 2\left[\underbrace{\frac{r^4\pi}{8} - \left(\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)^2 \frac{r^2\pi}{2}} + \left(r + \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)^2\frac{r^2\pi}{2}\right] =$$

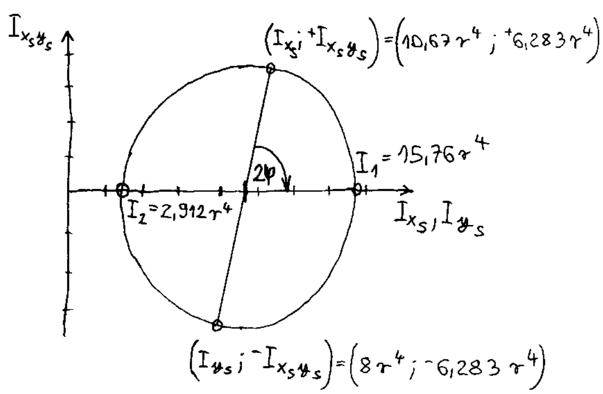
$$= \frac{(2r)^3 \cdot 4r}{12} + r^2\pi\left[\left(r + \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)^2 - \left(r - \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)^2\right] = 8\, r^4$$

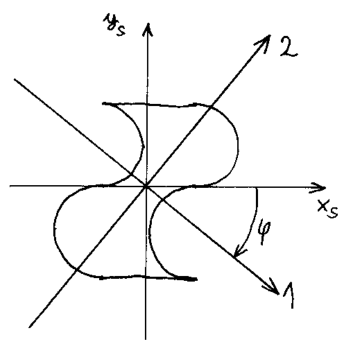
$$I_{x_s y_s} = 0 - 2\left[0 + \left(r - \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)(-r)\frac{r^2\pi}{2}\right] + 2\left[0 + \left(-r - \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)(-r)\frac{r^2\pi}{2}\right] =$$

$$= r^2\pi\left[r\left(r - \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right) + r\left(r + \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)\right] = +6{,}283\, r^4$$

$$I_{1,2} = \frac{I_{x_s} + I_{y_s}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_s} - I_{y_s}}{2}\right)^2 + I_{x_s y_s}^2} = 9{,}335\, r^4 \pm 6{,}423\, r^4 = \boxed{\begin{array}{l} I_1 = 15{,}76\, r^4 \\ I_2 = 2{,}912\, r^4 \end{array}}$$

$$\mathrm{tg}\, 2\varphi = \frac{-2 I_{x_s y_s}}{I_{x_s} - I_{y_s}} = \frac{-2(+6{,}283\, r^4)}{10{,}67\, r^4 - 8\, r^4} = -4{,}706 \rightarrow \boxed{\varphi = -39{,}00^\circ}$$

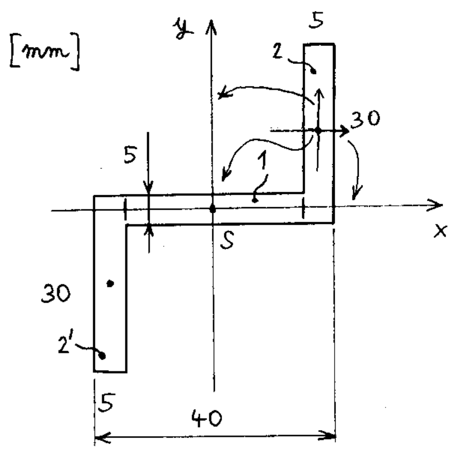




Megjegyzés:
I_{xs} számításánál a hozzáadott és kivont félkörök másodrendű nyomatékai egyenlők, így csak a befoglaló téglalappal kell számolnunk.
I_{ys} és I_{xsys} számításánál a 2-es szorzók azért alkalmazhatók, mert a két hozzáadott és a két kivont kör ezekre nézve szimmetrikusan helyezkedik el.

9. példa:

Számítsuk ki a súlyponti fő-másodrendű nyomatékokat! Számítsuk ki a főtengelyek szöghelyzetét, és ábrázoljuk elhelyezkedésüket!



Súlyponti $I_{1,2} = ?$

Főtengelyek helyzete? ($\varphi = ?$, rajz)

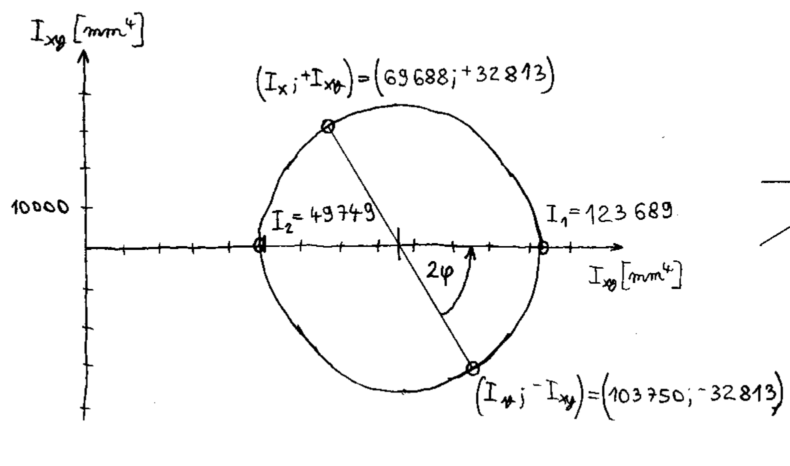
$$I_x = \frac{5^3 \cdot 30}{12} + 2\left[\frac{30^3 \cdot 5}{12} + 12{,}5^2 \cdot 5 \cdot 30\right] = 69\,688 \text{ mm}^4$$

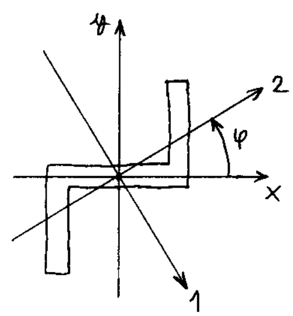
$$I_y = \frac{30^3 \cdot 5}{12} + 2\left[\frac{5^3 \cdot 30}{12} + 17{,}5^2 \cdot 5 \cdot 30\right] = 103\,750 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = 0 + 2\left[0 + (-17{,}5)(-12{,}5) \cdot 5 \cdot 30\right] = 32\,813 \text{ mm}^4$$

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = 86\,719 \pm 36\,970 = \begin{cases} I_1 = 123\,689 \text{ mm}^4 \\ I_2 = 49\,749 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

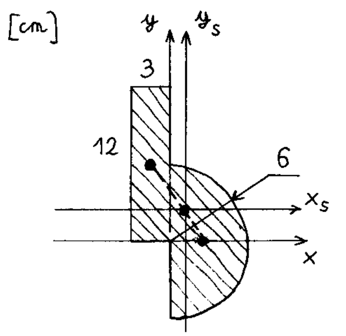
$$tg\, 2\varphi = \frac{-2 I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{-2(+32\,813)}{69\,688 - 103\,750} = +1{,}927 \longrightarrow \boxed{\varphi = +31{,}28^\circ}$$





10. példa:

Írjuk fel a másodrendű nyomatéki tenzort a súlyponti x-y rendszerben! Írjuk fel a másodrendű nyomatéki tenzort a súlyponti 1-2 rendszerben! Számítsuk ki és ábrázolja a főtengelyek helyzetét!



$\underline{\underline{I}}_{s(x,y)} = ?$

$\underline{\underline{I}}_{s(1,2)} = ?$

Főtengelyek helyzete? ($\varphi = ?$, rajz)

Mohr-kör?

$$x_s = \frac{+(-1{,}5)\cdot 3\cdot 12 + \left(+\frac{4}{3}\frac{6}{\pi}\right)\frac{6^2\pi}{2}}{+3\cdot 12 + \frac{6^2\pi}{2}} = \frac{+90}{92{,}55} = {}^{+}0{,}9724\ mm$$

$$y_s = \frac{+(+6)\cdot 3\cdot 12 + 0}{92{,}55} = \frac{+216}{92{,}55} = {}^{+}2{,}334\ mm$$

$$I_{x_s} = \frac{12^3\cdot 3}{3} + \frac{6^4\pi}{8} - 2{,}334^2\cdot 92{,}55 = 1733\ cm^4$$

$$I_{y_s} = \frac{3^3\cdot 12}{3} + \frac{6^4\pi}{8} - 0{,}9724^2\cdot 92{,}55 = 529{,}4\ cm^4$$

$$I_{x_s y_s} = \left[0 + (+1{,}5)(-6)\cdot 3\cdot 12\right] + \left[0\right] - (+0{,}9724)(+2{,}334)\cdot 92{,}55 = {}^{-}534{,}0\ cm^4$$

$$\underline{\underline{I}}_{s(x,y)} = \begin{bmatrix} I_{x_s} & -I_{x_s y_s} \\ -I_{x_s y_s} & I_{y_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1733 & +534 \\ +534 & 529{,}4 \end{bmatrix} cm^4$$

$$I_{1,2} = \frac{I_{x_s}+I_{y_s}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_s}-I_{y_s}}{2}\right)^2 + I_{x_s y_s}^2} = 1131{,}2 \pm 804{,}6 = \begin{cases} I_1 = 1936\ cm^4 \\ I_2 = 326{,}6\ cm^4 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{I}}_{s(1,2)} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1936 & 0 \\ 0 & 326{,}6 \end{bmatrix} cm^4$$

$$\mathrm{tg}\, 2\varphi = \frac{-2 I_{x_s y_s}}{I_{x_s} - I_{y_s}} = \frac{-2(-534)}{1733 - 529{,}4} = {}^{+}0{,}8873 \longrightarrow \boxed{\varphi = {}^{+}20{,}79^\circ}$$