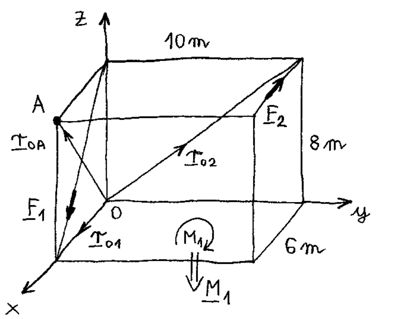
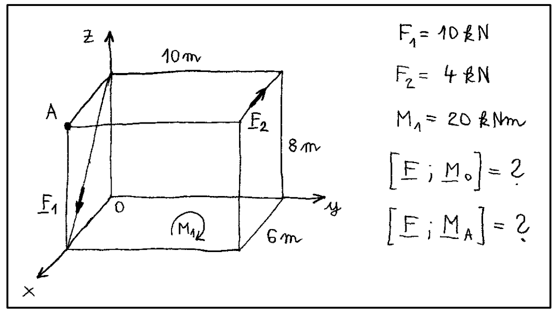
A 3. heti gyakorlat 2. példájához kapcsolódó feladat:

Számítsuk ki a megadott erőrendszer eredő redukált vektorkettősét az origóra és az A pontra!





$$\underline{F}_1 = F_1 \cdot \underline{e}_{F_1} = 10 \frac{6\underline{i} - 8\underline{k}}{\sqrt{6^2+8^2}} = 6\underline{i} - 8\underline{k} \ [kN]$$

$$\underline{F}_2 = F_2 \cdot \underline{e}_{F_2} = 4 \cdot (-\underline{i}) = -4\underline{i} \ [kN]$$

$$\underline{M}_1 = M_1 \cdot \underline{e}_{M_1} = 20 \cdot (-\underline{k}) = -20\underline{k} \ [kNm]$$

$$\boxed{\underline{F} = \sum \underline{F}_i = (6\underline{i} - 8\underline{k}) + (-4\underline{i}) = 2\underline{i} - 8\underline{k} \ [kN]}$$

$$\underline{M}_0 = \sum \underline{M}_i + \sum \underline{r}_{0i} \times \underline{F}_i$$

$$\underline{r}_{01} = 6\underline{i} \ [m] \qquad \underline{r}_{02} = 10\underline{j} + 8\underline{k} \ [m]$$

$$\underline{r}_{01} \times \underline{F}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -8 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0) - \underline{j}(-48-0) + \underline{k}(0-0) = 48\underline{j} \ [kNm]$$

$$\underline{r}_{02} \times \underline{F}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 10 & 8 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0) - \underline{j}(0+32) + \underline{k}(0+40) = -32\underline{j} + 40\underline{k} \ [kNm]$$

$$\boxed{\underline{M}_0 = [-20\underline{k}] + [(48\underline{j}) + (-32\underline{j} + 40\underline{k})] = 16\underline{j} + 20\underline{k} \ [kNm]}$$

$$\underline{M}_A = \underline{M}_0 - \underline{r}_{0A} \times \underline{F}$$

$$\underline{r}_{0A} = 6\underline{i} + 8\underline{k} \ [m]$$

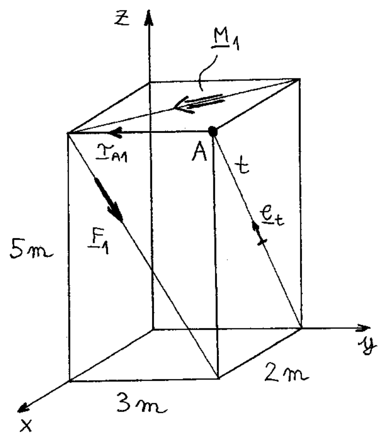
$$\underline{r}_{0A} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 6 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0) - \underline{j}(-48-16) + \underline{k}(0-0) = 64\underline{j} \ [kNm]$$

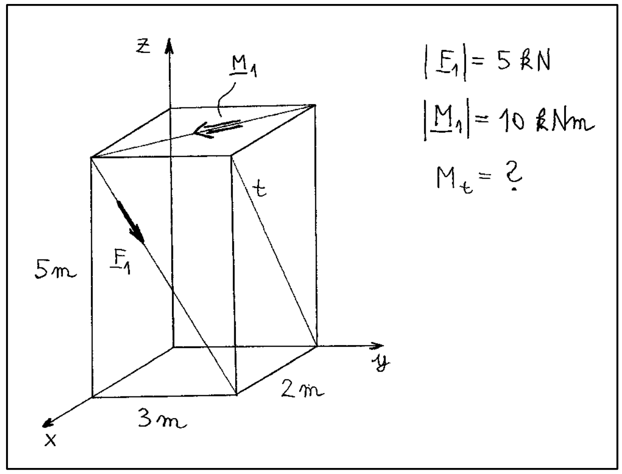
$$\boxed{\underline{M}_A = (16\underline{j} + 20\underline{k}) - (64\underline{j}) = -48\underline{j} + 20\underline{k} \ [kNm]}$$

Megjegyzések:
A hasáb alsó lapjára megadott nyomatékot vektorrá kellett alakítani!
Az A pontra számított nyomatékot az erőrendszer ismételt redukálása helyett a már ismert O ponti nyomatékértéket felhasználva számítottuk ki.

A 3. heti gyakorlat 3. példájához kapcsolódó feladat:

Számítsuk ki az erőrendszer nyomatékát a t tengelyre!





$$\underline{F}_1 = |\underline{F}_1|\,\underline{e}_{F_1} = 5\,\frac{3\underline{j} - 5\underline{k}}{\sqrt{3^2+5^2}} = 2{,}572\,\underline{j} - 4{,}287\,\underline{k}\ [kN]$$

$$\underline{M}_1 = |\underline{M}_1|\,\underline{e}_{M_1} = 10\,\frac{2\underline{i} - 3\underline{j}}{\sqrt{2^2+3^2}} = 5{,}547\,\underline{i} - 8{,}321\,\underline{j}\ [kNm]$$

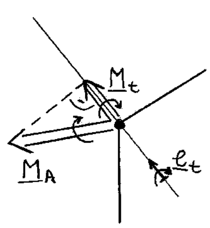
$$\underline{r}_{A1} = -3\,\underline{j}\ [m]$$

$$\underline{M}_A = \sum \underline{M}_i + \sum \underline{r}_{Ai} \times \underline{F}_i$$

$$\underline{r}_{A1} \times \underline{F}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2{,}572 & -4{,}287 \end{vmatrix} = \underline{i}(12{,}86 - 0) - \underline{j}(0-0) + \underline{k}(0-0) = 12{,}86\,\underline{i}\ [kNm]$$

$$\underline{M}_A = (5{,}547\,\underline{i} - 8{,}321\,\underline{j}) + (12{,}86\,\underline{i}) = 18{,}41\,\underline{i} - 8{,}321\,\underline{j}\ [kNm]$$

$$\boxed{M_t = \underline{M}_A \cdot \underline{e}_t = (18{,}41\,\underline{i} - 8{,}321\,\underline{j})\,\frac{2\underline{i} + 5\underline{k}}{\sqrt{2^2+5^2}} = \frac{36{,}82 + 0 + 0}{\sqrt{29}} = 6{,}837\ kNm}$$

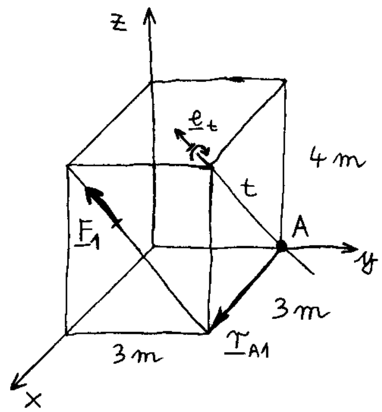


Megjegyzés:
A pozitív M_t érték azt jelzi, hogy az erőrendszer nyomatéka a tengelyre az $\mathbf{e}_t$ egységvektor iránya által kijelölt forgásiránnyal megegyező.

További feladatok:

1. példda:

Számítsuk ki az erőrendszer nyomatékát a t tengelyre!



$|\underline{F}_1| = 5\ kN$

$M_t = ?$

$$\underline{F}_1 = |\underline{F}_1| \cdot \underline{e}_{F_1} = 5\,\frac{-3\underline{j}+4\underline{k}}{\sqrt{3^2+4^2}} = -3\underline{j}+4\underline{k}\ [kN]$$

$$\underline{r}_{A1} = 3\underline{i}\ [m]$$

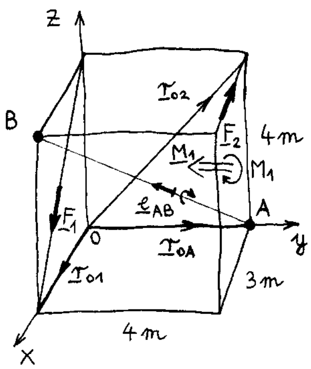
$$\underline{M}_A = \underline{r}_{A1} \times \underline{F}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0) - \underline{j}(12-0) + \underline{k}(-9-0) = $$
$$= -12\underline{j} - 9\underline{k}\ [kNm]$$

$$\boxed{M_t = \underline{M}_A \cdot \underline{e}_t = (-12\underline{j} - 9\underline{k})\,\frac{3\underline{i}+4\underline{k}}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{0+0-36}{5} = -7{,}2\ kNm}$$

Megjegyzés:
A negatív M_t érték arra utal, hogy az erőrendszer nyomatéka a tengelyre az $\mathbf{e}_t$ egységvektor iránya által kijelölt forgásiránnyal ellentétes. Ha az $\mathbf{e}_t$ vektort ellenkező irányúra vettük volna fel, pozitív eredményt kaptunk volna.

2. példa:

Adjuk meg az erőrendszer eredő redukált vektorkettősét az origóra! Számítsuk ki az erőrendszer nyomatékát az AB tengelyre!



$F_1 = 10\ kN$

$F_2 = 4\ kN$

$M_1 = 5\ kNm$

$[\underline{F};\underline{M}_0] = ?$

$M_{AB} = ?$

$$\underline{F}_1 = F_1\,\underline{e}_{F_1} = 10\,\frac{3\underline{i}-4\underline{k}}{\sqrt{3^2+4^2}} = 6\underline{i} - 8\underline{k}\ [kN]$$

$$\underline{F}_2 = F_2\,\underline{e}_{F_2} = 4(-\underline{i}) = -4\underline{i}\ [kN]$$

$$\underline{M}_1 = M_1\,\underline{e}_{M_1} = 5(-\underline{j}) = -5\underline{j}\ [kNm] \quad \leftarrow$$

$$\boxed{\underline{F} = \sum \underline{F}_i = (6\underline{i}-8\underline{k}) + (-4\underline{i}) = 2\underline{i} - 8\underline{k}\ [kN]}$$

$$\underline{M}_0 = \sum \underline{M}_i + \sum \underline{r}_{0i}\times\underline{F}_i$$

$$\underline{r}_{01} = 3\underline{i}\ [m]$$

$$\underline{r}_{02} = 4\underline{j} + 4\underline{k}\ [m]$$

$$\underline{r}_{01}\times\underline{F}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -8 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0) - \underline{j}(-24-0) + \underline{k}(0-0) = 24\underline{j}\ [kNm]$$

$$\underline{r}_{02}\times\underline{F}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0) - \underline{j}(0+16) + \underline{k}(0+16) = -16\underline{j} + 16\underline{k}\ [kNm]$$

$$\boxed{\underline{M}_0 = [-5\underline{j}] + [(24\underline{j}) + (-16\underline{j} + 16\underline{k})] = 3\underline{j} + 16\underline{k}\ [kNm]}$$

$$\underline{M}_A = \underline{M}_0 - \underline{r}_{0A}\times\underline{F}$$

$$\underline{r}_{0A} = 4\underline{j}\ [m]$$

$$\underline{r}_{0A}\times\underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix} = \underline{i}(-32-0) - \underline{j}(0-0) + \underline{k}(0-8) = -32\underline{i} - 8\underline{k}\ [kNm]$$

$$\underline{M}_A = (3\underline{j} + 16\underline{k}) - (-32\underline{i} - 8\underline{k}) = 32\underline{i} + 3\underline{j} + 24\underline{k}\ [kNm]$$

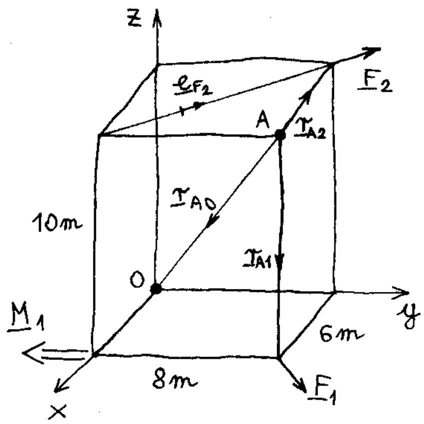
$$\boxed{M_{AB} = \underline{M}_A\cdot\underline{e}_{AB} = (32\underline{i} + 3\underline{j} + 24\underline{k})\,\frac{3\underline{i} - 4\underline{j} + 4\underline{k}}{\sqrt{3^2+4^2+4^2}} = \frac{96-12+96}{\sqrt{41}} = 28{,}11\ kNm}$$

Megjegyzés:

Most a tengely egységvektorának irányát nem vehettük fel önkényesen, mert a feladat kiírásban megadták, hogy az AB a pozitív irány.

3. példa:

Redukáljuk az erőrendszert az A pontra! Számítsuk ki az erőrendszer nyomatékát a z tengelyre.



$\underline{F}_1 = 300\,\underline{i} + 400\,\underline{j} - 500\,\underline{k}$ [N]

$|\underline{F}_2| = 500$ N

$|\underline{M}_1| = 700$ Nm

$[\underline{F}, \underline{M}_A] = ?$

$M_z = ?$

$$\underline{F}_2 = |\underline{F}_2|\,\underline{e}_{F2} = 500\,\frac{-6\,\underline{i} + 8\,\underline{j}}{\sqrt{6^2+8^2}} = -300\,\underline{i} + 400\,\underline{j}\ [\mathrm{N}]$$

$$\underline{M}_1 = |\underline{M}_1|\,\underline{e}_{M1} = 700\cdot(-\underline{j}) = -700\,\underline{j}\ [\mathrm{Nm}]$$

$$\boxed{\underline{F} = \sum \underline{F}_i = (300\,\underline{i} + 400\,\underline{j} - 500\,\underline{k}) + (-300\,\underline{i} + 400\,\underline{j}) = 800\,\underline{j} - 500\,\underline{k}\ [\mathrm{N}]}$$

$$\underline{M}_A = \sum \underline{M}_i + \sum \underline{r}_{Ai}\times\underline{F}_i$$

$$\underline{r}_{A1} = -10\,\underline{k}\ [\mathrm{m}]$$

$$\underline{r}_{A2} = -6\,\underline{i}\ [\mathrm{m}]$$

$$\underline{r}_{A1}\times\underline{F}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & -10 \\ 300 & 400 & -500 \end{vmatrix} = \underline{i}(0+4000) - \underline{j}(0+3000) + \underline{k}(0-0) = 4000\,\underline{i} - 3000\,\underline{j}\ [\mathrm{Nm}]$$

$$\underline{r}_{A2}\times\underline{F}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -6 & 0 & 0 \\ -300 & 400 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0) - \underline{j}(0-0) + \underline{k}(-2400-0) = -2400\,\underline{k}\ [\mathrm{Nm}]$$

$$\boxed{\underline{M}_A = [-700\,\underline{j}] + [(4000\,\underline{i} - 3000\,\underline{j}) + (-2400\,\underline{k})] = 4000\,\underline{i} - 3700\,\underline{j} - 2400\,\underline{k}\ [\mathrm{Nm}]}$$

$$\underline{M}_0 = \underline{M}_A - \underline{r}_{A0}\times\underline{F}$$

$$\underline{r}_{A0} = -6\,\underline{i} - 8\,\underline{j} - 10\,\underline{k}\ [\mathrm{m}]$$

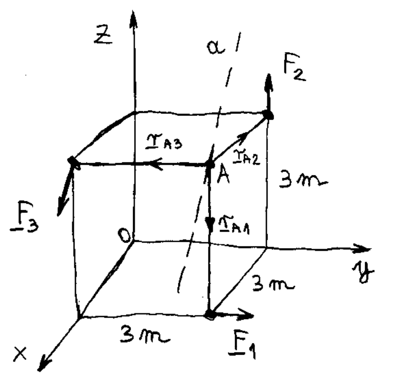
$$\underline{r}_{A0}\times\underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -6 & -8 & -10 \\ 0 & 800 & -500 \end{vmatrix} = \underline{i}(4000+8000) - \underline{j}(3000-0) + \underline{k}(-4800-0) = 12000\,\underline{i} - 3000\,\underline{j} - 4800\,\underline{k}\ [\mathrm{Nm}]$$

$$\underline{M}_0 = (4000\,\underline{i} - 3700\,\underline{j} - 2400\,\underline{k}) - (12000\,\underline{i} - 3000\,\underline{j} - 4800\,\underline{k}) = -8000\,\underline{i} - 700\,\underline{j} + 2400\,\underline{k}\ [\mathrm{Nm}]$$

$$\boxed{M_z = \underline{M}_0\cdot\underline{k} = 2400\ \mathrm{Nm}}$$

4. példa:

Számítsuk ki az erőrendszer „a” tengelyre vett nyomatékát!



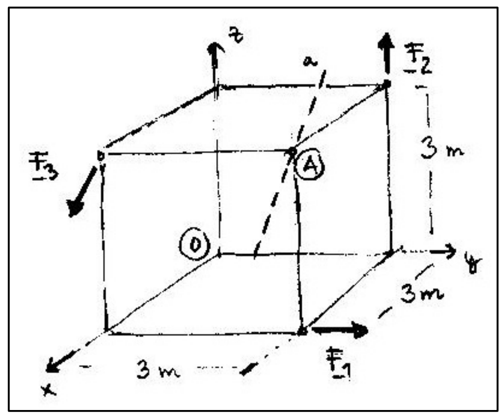
$F_1 = 3\,N$

$F_2 = 4\,N$

$\underline{F}_3 = 3\underline{i} - 4\underline{k}\ [N]$

$\underline{a} = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}$

$M_a = ?$



$$\underline{F}_1 = F_1\,\underline{e}_{F_1} = 3\underline{j}\ [N]$$

$$\underline{F}_2 = F_2\,\underline{e}_{F_2} = 4\underline{k}\ [N]$$

$$\underline{M}_A = \sum \underline{M}_i + \sum \underline{r}_{Ai} \times \underline{F}_i$$

$$\underline{r}_{A1} = -3\underline{k}\ [m]$$

$$\underline{r}_{A2} = -3\underline{i}\ [m]$$

$$\underline{r}_{A3} = -3\underline{j}\ [m]$$

$$\underline{r}_{A1} \times \underline{F}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}(0+3) - \underline{j}(0-0) + \underline{k}(0-0) = 9\underline{i}\ [Nm]$$

$$\underline{r}_{A2} \times \underline{F}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0) - \underline{j}(-12-0) + \underline{k}(0-0) = 12\underline{j}\ [Nm]$$

$$\underline{r}_{A3} \times \underline{F}_3 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \underline{i}(12-0) - \underline{j}(0-0) + \underline{k}(0+9) = 12\underline{i} + 9\underline{k}\ [Nm]$$

$$\underline{M}_A = [\underline{0}] + \left[(9\underline{i}) + (12\underline{j}) + (12\underline{i} + 9\underline{k})\right] = 21\underline{i} + 12\underline{j} + 9\underline{k}\ [Nm]$$

$$\boxed{M_a = \underline{M}_A \cdot \underline{e}_a = \underline{M}_A \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = (21\underline{i} + 12\underline{j} + 9\underline{k}) \frac{\underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{21+24+18}{3} = 21\ Nm}$$

Megjegyzés:
Az „a” tengelyt az $\underline{a}$ irányvektorral adták meg, amiből egységvektort kellett csinálni a nyomaték vetületének számításához.