Egy kis elmélet

Az eddigiekben egy **F** erő-vektort $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_F$ alakban írtunk fel, ahol F az erő nagysága, $\mathbf{e}_F$ pedig az erő irányába mutató egységvektor volt. Az **F** erő azonban felírható $\mathbf{F} = \lambda\,\mathbf{v}_F$ alakban is, ahol λ skalár, de nem egyenlő az **F** erő nagyságával, $\mathbf{v}_F$ pedig az erő irányába mutató vektor, amely nem kell, hogy egységvektor legyen. Ennek a felírásmódnak az előnye, hogy $\mathbf{v}_F$ koordinátái egész számoknak választhatók, míg $\mathbf{e}_F$ koordinátái a normálás miatt általában nem egész számok. A következő példában ez előnyt jelent majd, mert az $\mathbf{F} = \lambda\,\mathbf{v}_F$ alakú vektorokat olyan egyenletekbe kell beírnunk, amelyekben a λ skalárok lesznek az ismeretlenek. A számítást ekkor jelentősen egyszerűsíti, hogy az együtthatók egész számok lesznek.

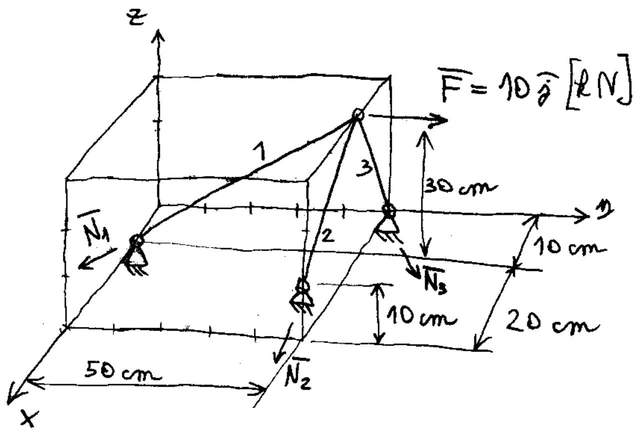
Vigyáznunk kell azonban, hogy ha egy ilyen vektornak a hosszát úgy akarjuk kiszámítani, hogy magát az **F** vektort nem számoljuk ki, akkor az $F = \lambda\left|\mathbf{v}_F\right|$ képletet kell használnunk. Mivel most nem egységvektort „növesztünk fel” a λ skalárral, hanem egy $\left|\mathbf{v}_F\right|$ hosszúságú vektort, ezért a vektor hossza ezen két érték szorzataként adódik.

Vektorok vegyes-szorzata:

$$\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

1. példa: A 12. gyakorlat 1. feladata.

Számítsuk ki a rúderőket! Jelöljük, hogy a rúd húzott vagy nyomott!



$N_1 = ?$ h/ny ?
$N_2 = ?$
$N_3 = ?$

$$\overline{N_1} = N_1 \overline{e_1} = N_1 \frac{\overline{v_1}}{|\overline{v_1}|} = \lambda_1 \overline{v_1} = \lambda_1\left(-5\overline{j} - 3\overline{k}\right) \qquad N_1 = \lambda_1 |\overline{v_1}|$$

$$\overline{N_2} = N_2 \overline{e_2} = N_2 \frac{\overline{v_2}}{|\overline{v_2}|} = \lambda_2 \overline{v_2} = \lambda_2\left(+2\overline{i} - 2\overline{k}\right) \qquad N_2 = \lambda_2 |\overline{v_2}|$$

$$\overline{N_3} = N_3 \overline{e_3} = N_3 \frac{\overline{v_3}}{|\overline{v_3}|} = \lambda_3 \overline{v_3} = \lambda_3\left(-\overline{i} - 3\overline{k}\right) \qquad N_3 = \lambda_3 |\overline{v_3}|$$

$$\sum \overline{F} = \overline{0} = \overline{F} + \overline{N_1} + \overline{N_2} + \overline{N_3} = 10\,\overline{j} + \lambda_1\left(-5\overline{j} - 3\overline{k}\right) + \lambda_2\left(2\overline{i} - 2\overline{k}\right) + \lambda_3\left(-\overline{i} - 3\overline{k}\right)$$

1.) $\sum F_x = 0 = 2\lambda_2 - \lambda_3$

2.) $\sum F_y = 0 = 10 - 5\lambda_1$

3.) $\sum F_z = 0 = -3\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3$

2.) $\lambda_1 = 2$

1.) $\lambda_3 = 2\lambda_2$

1→3.) $0 = -3\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3(2\lambda_2)$

$0 = -3\lambda_1 - 8\lambda_2$

$\lambda_2 = \frac{-3}{8}\lambda_1 = \frac{-3}{8}\cdot 2 = \frac{-3}{4}$

1.) $\lambda_3 = 2\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-3}{2}$

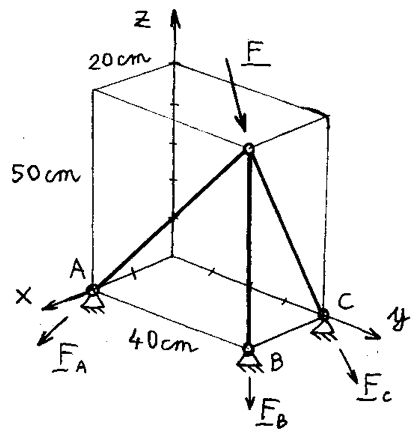
$$\boxed{N_1 = \lambda_1 |\overline{v_1}| = +2\sqrt{5^2+3^2} = +11{,}66 \text{ kN (h)}}$$

$$\boxed{N_2 = \lambda_2 |\overline{v_2}| = \frac{-3}{4}\sqrt{2^2+2^2} = -2{,}12 \text{ kN (ny)}}$$

$$\boxed{N_3 = \frac{-3}{2} |\overline{v_3}| = \frac{-3}{2}\sqrt{1^2+3^2} = -4{,}74 \text{ kN (ny)}}$$

2. példa:

Számítsuk ki a reakcióerők vektorait!



$\underline{F} = 3\underline{i} + 6\underline{j} - 4\underline{k}$ [kN]

$\underline{F}_A = ?$

$\underline{F}_B = ?$

$\underline{F}_C = ?$

$$\underline{F}_A = F_A\, \underline{e}_{F_A} = F_A \frac{\underline{v}_{F_A}}{|\underline{v}_{F_A}|} = \lambda_A\, \underline{v}_{F_A} = \lambda_A\left(-4\underline{j} - 5\underline{k}\right)$$

$$\underline{F}_B = F_B\, \underline{e}_{F_B} = F_B \frac{\underline{v}_{F_B}}{|\underline{v}_{F_B}|} = \lambda_B\, \underline{v}_{F_B} = \lambda_B\left(-\underline{k}\right)$$

$$\underline{F}_C = F_C\, \underline{e}_{F_C} = F_C \frac{\underline{v}_{F_C}}{|\underline{v}_{F_C}|} = \lambda_C\, \underline{v}_{F_C} = \lambda_C\left(-2\underline{i} - 5\underline{k}\right)$$

$$\sum \underline{F} = \underline{0} = \underline{F} + \underline{F}_A + \underline{F}_B + \underline{F}_C = \left(3\underline{i} + 6\underline{j} - 4\underline{k}\right) + \lambda_A\left(-4\underline{j} - 5\underline{k}\right) + \lambda_B\left(-\underline{k}\right) + \lambda_C\left(-2\underline{i} - 5\underline{k}\right)$$

1.) $\sum F_x = 0 = 3 - 2\lambda_C$

2.) $\sum F_y = 0 = 6 - 4\lambda_A$

3.) $\sum F_z = 0 = -4 - 5\lambda_A - \lambda_B - 5\lambda_C$

1.) $\lambda_C = \frac{3}{2}$

2.) $\lambda_A = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

3.) $\lambda_B = -4 - 5\lambda_A - 5\lambda_C =$
$= -4 - 5\cdot\left(\frac{3}{2}\right) - 5\left(\frac{3}{2}\right) = -19$

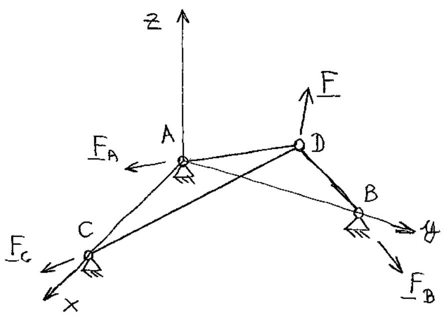
$$\boxed{\underline{F}_A = \frac{3}{2}\left(-4\underline{j} - 5\underline{k}\right) = -6\underline{j} - 7{,}5\underline{k}\ [\text{kN}]}$$

$$\boxed{\underline{F}_B = -19\left(-\underline{k}\right) = 19\underline{k}\ [\text{kN}]}$$

$$\boxed{\underline{F}_C = \frac{3}{2}\left(-2\underline{i} - 5\underline{k}\right) = -3\underline{i} - 7{,}5\underline{k}\ [\text{kN}]}$$

3. példa: A 12. gyakorlat 2. feladata. Számítás vegyes-szorzatokkal.

Bontsuk fel az F erőt rúdirányú összetevőkre!



$$\underline{F} = -\underline{i} - 3\underline{j} + 4\underline{k} \ [kN]$$

$A(0,0,0)$

$B(0,7,0)$

$C(6,0,0)$

$D(0,5,3)$

$$\underline{F}_A = F_A \underline{e}_{F_A} = F_A \frac{\underline{v}_{F_A}}{|\underline{v}_{F_A}|} = \lambda_A \underline{v}_{F_A} = \lambda_A \underline{r}_{DA} = \lambda_A(-5\underline{j} - 3\underline{k})$$

$$\underline{F}_B = F_B \underline{e}_{F_B} = F_B \frac{\underline{v}_{F_B}}{|\underline{v}_{F_B}|} = \lambda_B \underline{v}_{F_B} = \lambda_B \underline{r}_{DB} = \lambda_B(2\underline{j} - 3\underline{k})$$

$$\underline{F}_C = F_C \underline{e}_{F_C} = F_C \frac{\underline{v}_{F_C}}{|\underline{v}_{F_C}|} = \lambda_C \underline{v}_{F_C} = \lambda_C \underline{r}_{DC} = \lambda_C(6\underline{i} - 5\underline{j} - 3\underline{k})$$

$$\underline{F} = \underline{F}_A + \underline{F}_B + \underline{F}_C = \lambda_A \underline{v}_A + \lambda_B \underline{v}_B + \lambda_C \underline{v}_C$$

$$\lambda_A = \frac{\underline{F}\,\underline{v}_B\,\underline{v}_C}{\underline{v}_A\,\underline{v}_B\,\underline{v}_C} \qquad \lambda_B = \frac{\underline{v}_A\,\underline{F}\,\underline{v}_C}{\underline{v}_A\,\underline{v}_B\,\underline{v}_C} \qquad \lambda_C = \frac{\underline{v}_A\,\underline{v}_B\,\underline{F}}{\underline{v}_A\,\underline{v}_B\,\underline{v}_C}$$

$$\lambda_A = \frac{\underline{F}\,\underline{v}_B\,\underline{v}_C}{\underline{v}_A\,\underline{v}_B\,\underline{v}_C}$$

$$\underline{F}\,\underline{v}_B\,\underline{v}_C = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -1(-6-15) - (-3)(0+18) + 4(0-12) = 21 + 54 - 48 = 27$$

$$\underline{v}_A\,\underline{v}_B\,\underline{v}_C = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 0 - (-5)(0+18) + (-3)(0-12) = 0 + 90 + 36 = 126$$

$$\lambda_A = \frac{27}{126} = 0{,}2143$$

$$\boxed{\underline{F}_A = \lambda_A \underline{v}_A = 0{,}2143(-5\underline{j} - 3\underline{k}) = -1{,}072\,\underline{j} - 0{,}6429\,\underline{k} \ [kN]}$$

$$\lambda_B = \frac{\underline{v}_A \underline{F} \underline{v}_C}{\underline{v}_A \underline{v}_B \underline{v}_C}$$

$$\underline{v}_A \underline{F} \underline{v}_C = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 6 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 0 - (-5)(3-24) - 3(+5+18) =$$

$$= 0 - 105 - 69 = -174$$

$$\lambda_B = \frac{-174}{126} = -1{,}381$$

$$\boxed{\underline{F}_B = \lambda_B \underline{v}_B = -1{,}381(2\underline{j} - 3\underline{k}) = -2{,}762\,\underline{j} + 4{,}143\,\underline{k}\ [kN]}$$

$$\lambda_C = \frac{\underline{v}_A \underline{v}_B \underline{F}}{\underline{v}_A \underline{v}_B \underline{v}_C}$$

$$\underline{v}_A \underline{v}_B \underline{F} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 - (-5)(0-3) - 3(0+2) =$$

$$= 0 - 15 - 6 = -21$$

$$\lambda_C = \frac{-21}{126} = -0{,}1667$$

$$\boxed{\underline{F}_C = \lambda_C \underline{v}_C = -0{,}1667(6\underline{i} - 5\underline{j} - 3\underline{k}) = -\underline{i} + 0{,}8335\,\underline{j} + 0{,}5\,\underline{k}\ [kN]}$$