Kommentár az előadási gyakorlat második példájához:

Az Mmax számításnál végül sikerült -44,53kNm-t kihoznom eredménynek. Az óra után többen szóltak, hogy szerintük ez így nem jó. Igazuk is van. A hiba azonban szerencsére csak a negatív előjel.

Az előjelszabályt még helyesen alkalmaztam, mert jobbra nézve a balra forgató nyomaték a pozitív. A képlet összes tagját ennek megfelelően írtam fel. A kifejezést kiszámítva is +44,53kNm jön ki, és az ábrába is helyesen sikerült berajzolnom, hiszen alul van a pozitív előjel.

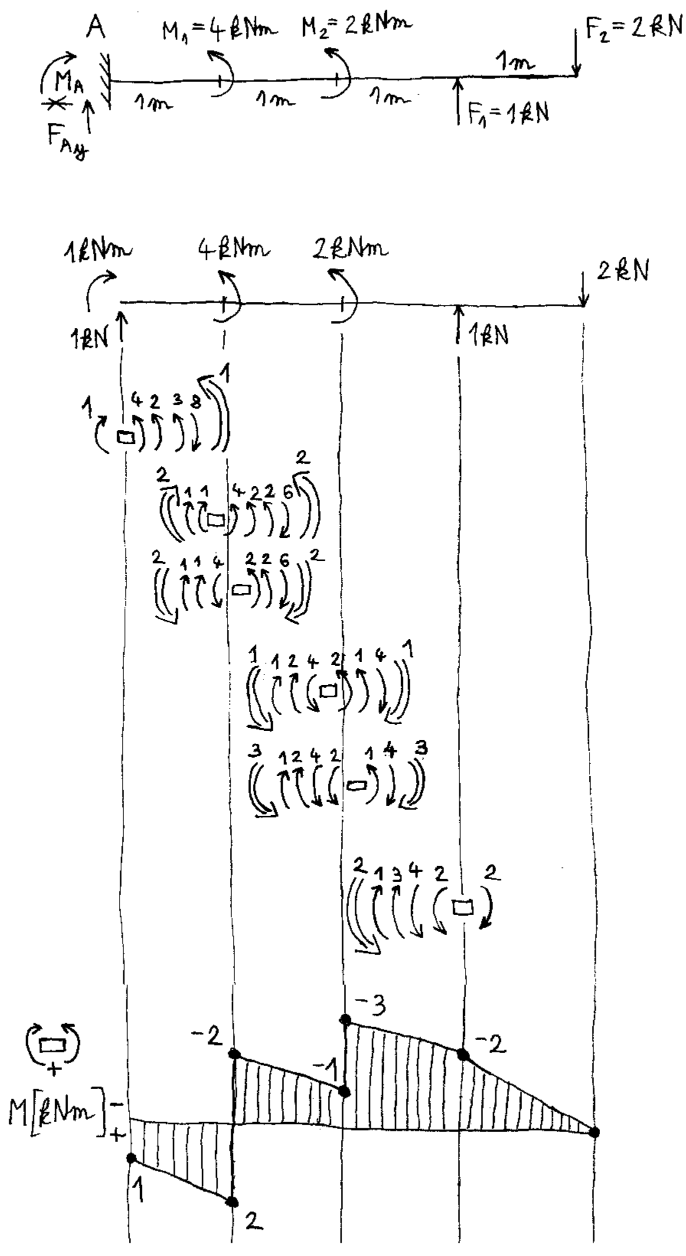
Az Mmax számítás helyesen tehát:

$$M_{\max} = -(p_1 x)\frac{x}{2} + 100(x+1) - 37{,}5(x+2) = -100\frac{0{,}625^2}{2} + 100 \cdot 1{,}625 - 37{,}5 \cdot 2{,}625 = 44{,}53\ kNm$$

Koncentrált erőkkel és nyomatékokkal terhelt tartók igénybevételi ábrái

1. példa:

Számítsuk ki a reakciókat, és a jellemző értékek feltüntetésével rajzoljuk meg a nyomatéki ábrát!



$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{F_{Ax} = 0}$$

$$\sum F_y = 0 = F_{Ay} + F_1 - F_2$$

$$\boxed{F_{Ay} = F_2 - F_1 = 2 - 1 = 1\,kN\ (\uparrow)}$$

$$\sum M_A = 0 = -M_A + M_1 + M_2 + F_1 \cdot 3 - F_2 \cdot 4$$

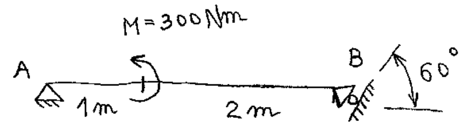
$$\boxed{M_A} = M_1 + M_2 + 3F_1 - 4F_2 =$$

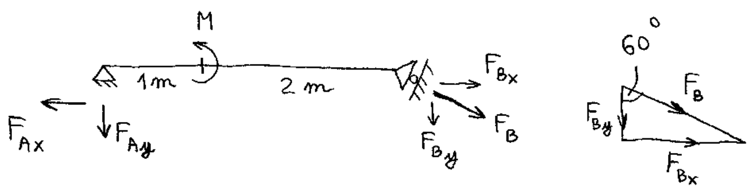
$$= 4 + 2 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = \boxed{1\,kNm\ \curvearrowright}$$

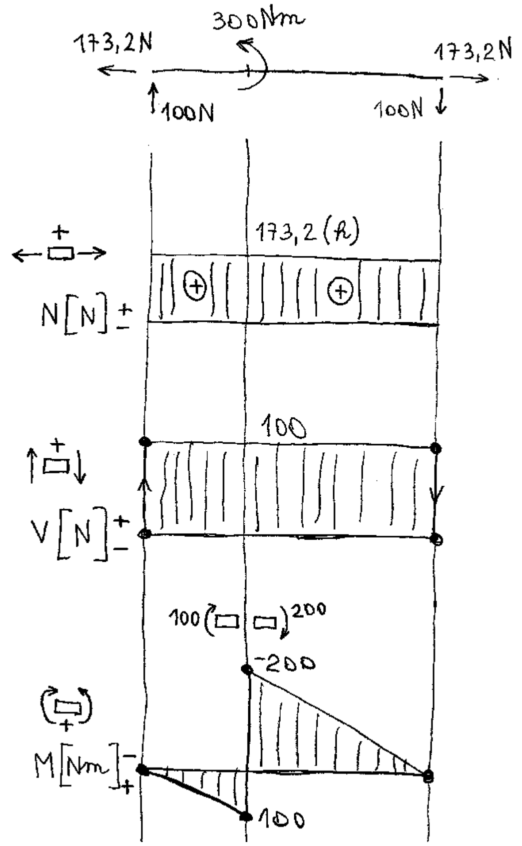
Megjegyzés:
Figyeljük meg a koncentrált nyomatékoknál kialakuló ugrást a nyomatéki ábrában!
A tartó bal végén lévő befogási nyomaték miatt nem nulla a metszék a nyomatéki ábra szélén.

2. példa:

Számítsuk ki a reakcióerőket, és rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!







$$\sum M_A = 0 = +M - F_{By} \cdot 3$$

$$\boxed{F_{By} = \frac{M}{3} = \frac{300}{3} = 100\ N\ (\downarrow)}$$

$$tg\,60° = \frac{F_{Bx}}{F_{By}}$$

$$\boxed{F_{Bx} = F_{By} \cdot tg\,60° = 100\ tg\,60° = 173{,}2\ N\ (\rightarrow)}$$

$$\sum F_x = 0 = -F_{Ax} + F_{Bx}$$

$$\boxed{F_{Ax} = F_{Bx} = 173{,}2\ N\ (\leftarrow)}$$

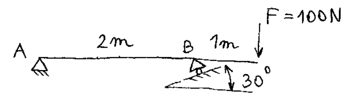
$$\sum F_y = 0 = -F_{Ay} + F_{By}$$

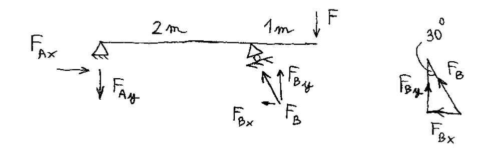
$$\boxed{F_{Ay} = F_{By} = 100\ N\ (\uparrow)}$$

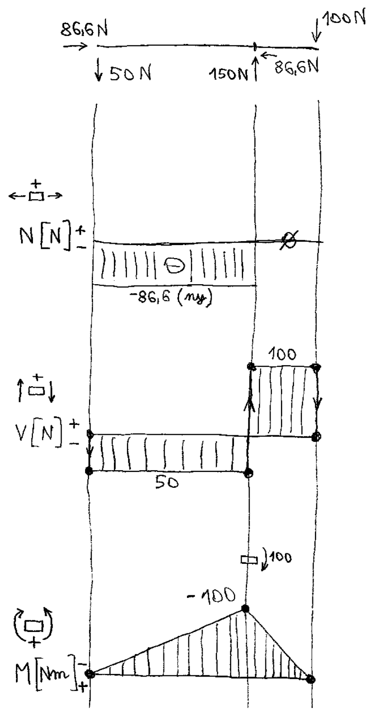
Megjegyzés:
A ferde támasz miatt most is lesz vízszintes reakció is, pedig a tartóra aktív teherként nem is hat erő. Ezért fontos, hogy első lépésben minden lehetséges reakcióerő-komponenst felrajzoljunk, és csak utána döntsük el, hogy melyik lesz esetleg nulla.

3. példa:

Számítsuk ki a reakcióerőket, és rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!







$$\sum M_A = 0 = F_{By} \cdot 2 - F \cdot 3$$

$$\boxed{F_{By} = \frac{3}{2} F = \frac{3}{2} \cdot 100 = 150\,N\,(\uparrow)}$$

$$tg\,30^\circ = \frac{F_{Bx}}{F_{By}}$$

$$\boxed{F_{Bx} = F_{By} \cdot tg\,30^\circ = 150\,tg\,30^\circ = 86{,}6\,N\,(\leftarrow)}$$

$$\sum F_x = 0 = F_{Ax} - F_{Bx}$$

$$\boxed{F_{Ax} = F_{Bx} = 86{,}6\,N\,(\rightarrow)}$$

$$\sum F_y = 0 = -F_{Ay} + F_{By} - F$$

$$\boxed{F_{Ay} = F_{By} - F = 150 - 100 = 50\,N\,(\downarrow)}$$

$$\boxed{F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = \sqrt{86{,}6^2 + 150^2} = 173{,}2\,N\,(\nwarrow)}$$

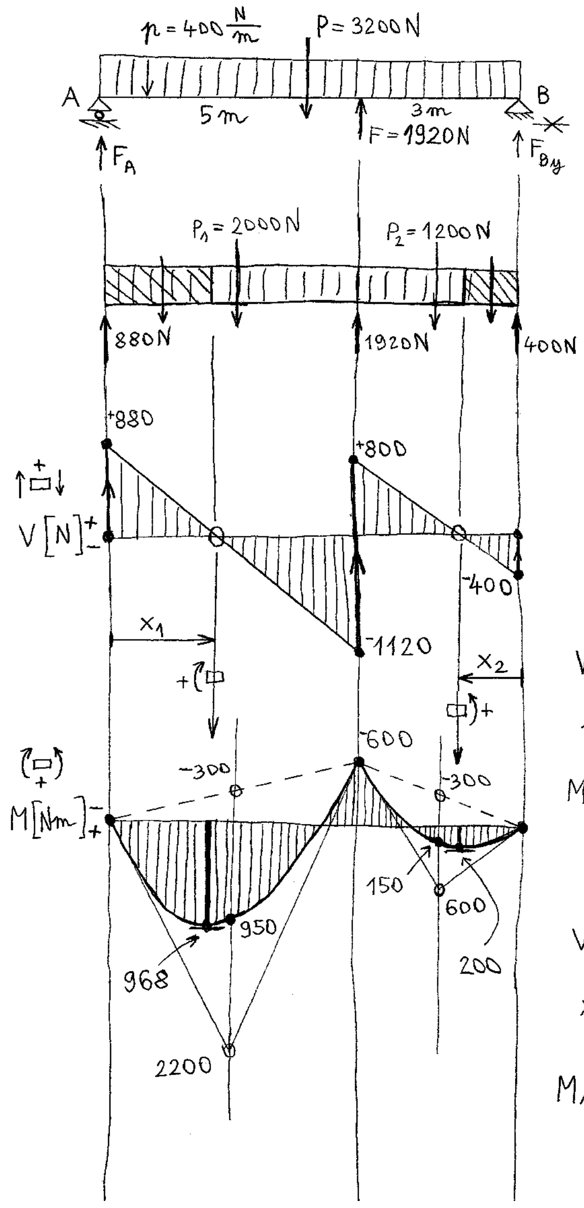
Megjegyzés:
A görgős támasznál most is csak egy hatásvonal mentén működhet reakcióerő. Ez az F_B erő hatásvonala. Azért szerepel végül mégis mindkét komponens, mert a támasz ferde, és az F_B reakcióerő F_{Bx} és F_{By} komponensekből rakható össze. Azonban ezek az összetevők nem függetlenek, a $tg\,30° = \frac{F_{Bx}}{F_{By}}$ összefüggés áll fenn közöttük. Ha konkrétan nem kérdeznek rá F_B-re, csak reakcióerőket kell számítani, akkor elég kiszámítanunk az F_{Bx} és F_{By} összetevőket. Ha F_B-t is megkérdezik, akkor Pitagorasszal érdemes számolni.

Az erők irányának felvételénél először F_B irányát találtuk ki úgy, hogy elképzeltünk egy nyomatéki egyensúlyt az A pontra. Ezzel természetesen az F_{Bx} és F_{By} összetevők irányát is meghatároztuk. Ezután F_{Ax}-nek szembe kell mutatnia F_{Bx}-el, F_{Ay} lefelé mutató iránya pedig a B pontra elképzelt nyomatéki egyensúlyból adódik.

A következő példákban már megoszló erők is vannak

4. példa:

Számítsuk ki a reakciókat, és a jellemző értékek feltüntetésével rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!



$$P = p \cdot 8 = 400 \cdot 8 = 3200\,N$$

$$\sum M_A = 0 = -P \cdot 4 + F \cdot 5 + F_{By} \cdot 8$$

$$\boxed{F_{By}} = \frac{4P - 5F}{8} = \frac{4 \cdot 3200 - 5 \cdot 1920}{8} = \boxed{400\,N\,(\uparrow)}$$

$$\sum F_y = 0 = F_A - P + F + F_{By}$$

$$\boxed{F_A} = P - F - F_{By} = 3200 - 1920 - 400 = \boxed{880\,N\,(\uparrow)}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{F_{Ax} = 0}$$

$$P_1 = p \cdot 5 = 400 \cdot 5 = 2000\,N$$

$$P_2 = p \cdot 3 = 400 \cdot 3 = 1200\,N$$

$$V(x_1) = {}^{+}880 - p\,x_1 = 0$$

$$x_1 = \frac{880}{p} = \frac{880}{400} = 2{,}2\,m$$

$$M_{max1} = M(x_1) = F_A\,x_1 - p\,x_1 \frac{x_1}{2} = 880 \cdot 2{,}2 - 400 \frac{2{,}2^2}{2} = {}^{+}968\,Nm$$

$$V(x_2) = {}^{-}400 + p\,x_2 = 0$$

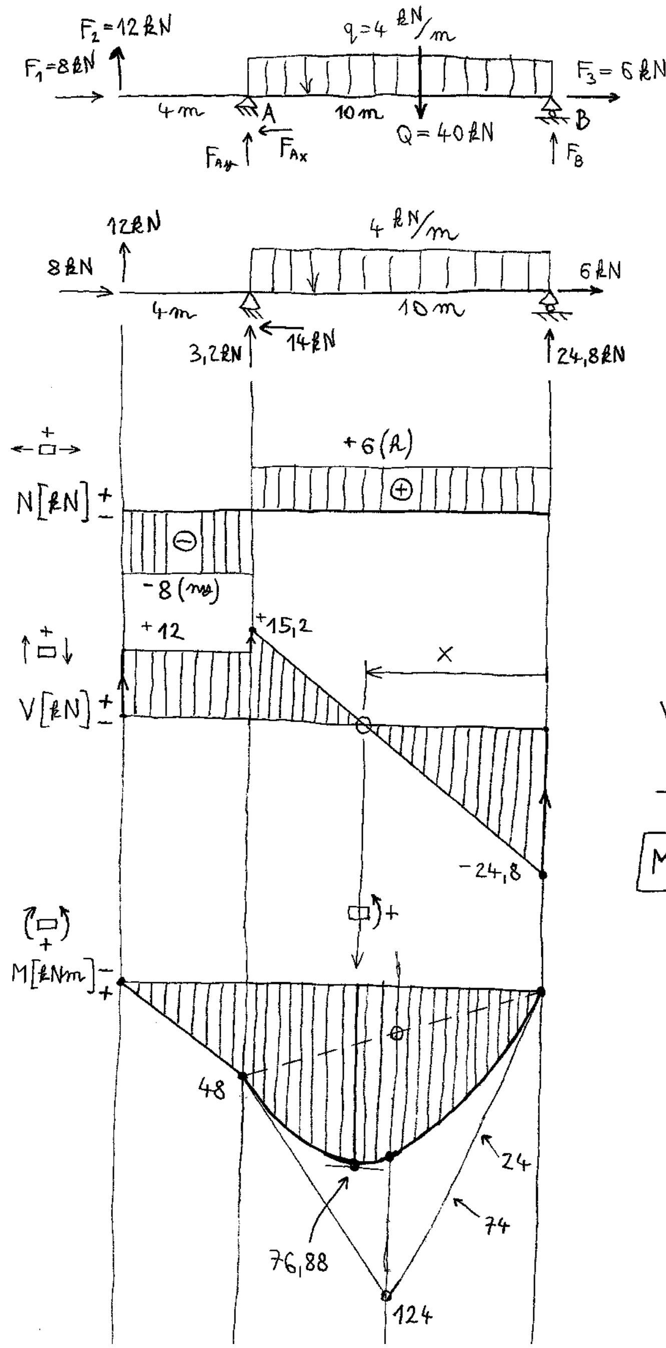
$$x_2 = \frac{400}{p} = \frac{400}{400} = 1\,m$$

$$M_{max2} = M(x_2) = F_{By} \cdot x_2 - p\,x_2 \frac{x_2}{2} = 400 \cdot 1 - 400 \frac{1^2}{2} = {}^{+}200\,Nm$$

Megjegyzés:
Mivel az F erő törést okoz a nyomatéki ábrában, a megoszló teher alatti parabolát két részletben kellett megrajzolnunk. Ez teljesen hasonló szituáció, mint az előadás 2. példájában, csak most nem a reakcióerő okozza a parabola törését, hanem egy aktív erő.

5. példa:

Számítsuk ki a reakciókat, és a jellemző értékek feltüntetésével rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!



$$\sum F_x = 0 = F_1 - F_{Ax} + F_3$$

$$\boxed{F_{Ax} = F_1 + F_3 = 8 + 6 = 14\ kN\ (\leftarrow)}$$

$$\sum M_A = 0 = -F_2 \cdot 4 - Q \cdot 5 + F_B \cdot 10$$

$$\boxed{F_B = \frac{4F_2 + 5Q}{10} = \frac{4 \cdot 12 + 5 \cdot 40}{10} = 24{,}8\ kN\ (\uparrow)}$$

$$\sum F_y = 0 = F_2 + F_{Ay} - Q + F_B$$

$$\boxed{F_{Ay} = Q - F_2 - F_B = 40 - 12 - 24{,}8 = 3{,}2\ kN\ (\uparrow)}$$

$$V(x) = -24{,}8 + q x = 0$$

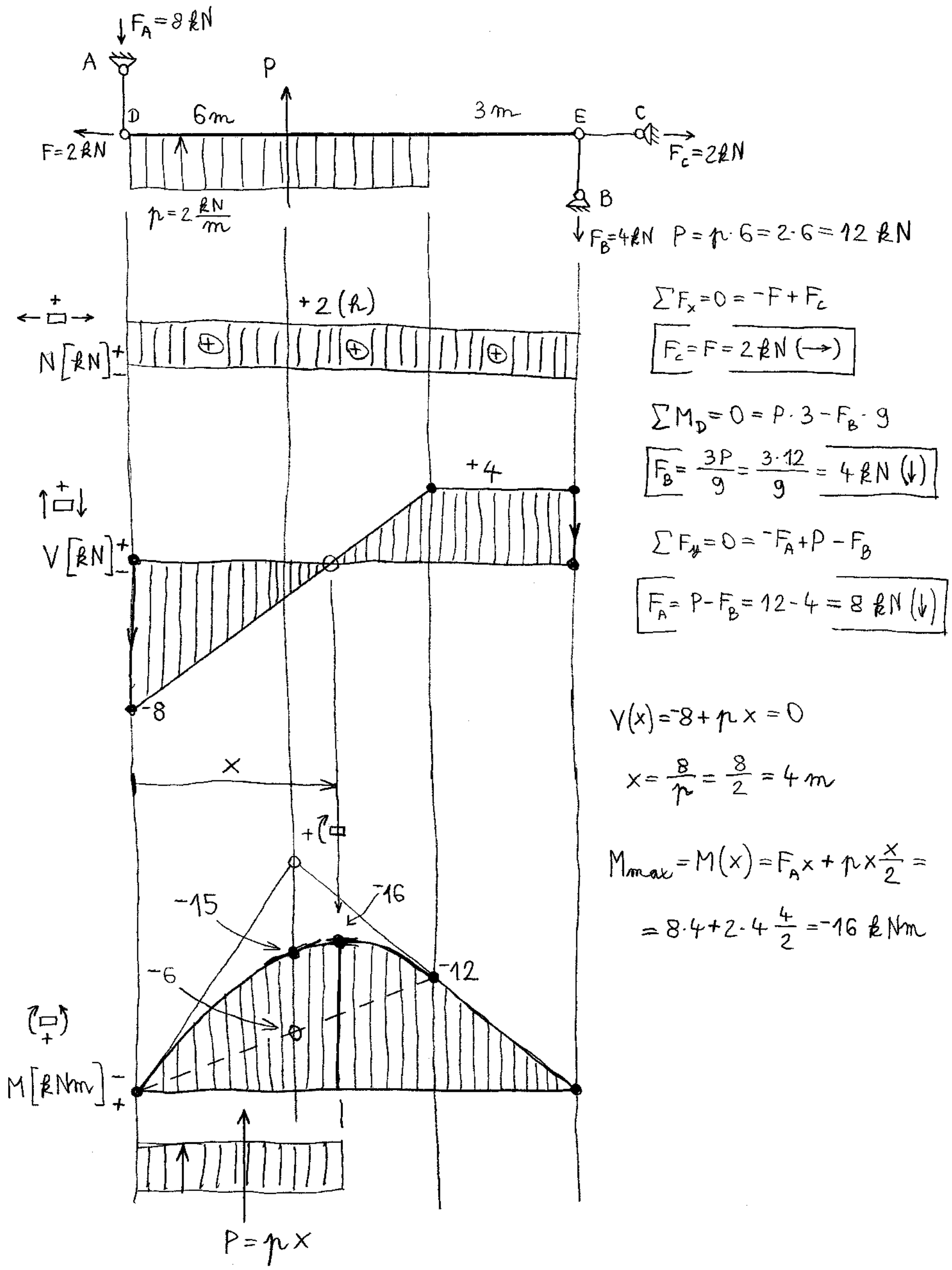
$$x = \frac{24{,}8}{q} = \frac{24{,}8}{4} = 6{,}2\ m$$

$$\boxed{M_{max}} = M(x) = F_B x - q x \frac{x}{2} = 24{,}8 \cdot 6{,}2 - 4\frac{6{,}2^2}{2} = \boxed{76{,}88\ kNm}$$

Megjegyzés:
Az A támasz függőleges reakcióereje törést okoz a nyomatéki ábrában. Ez most pont a megoszló teher szélén van. Ez okozza azt, hogy a parabola bal oldali végérintőjének meredeksége eltér a nyomatéki ábra megelőző szakaszának meredekségétől.

6. példa:

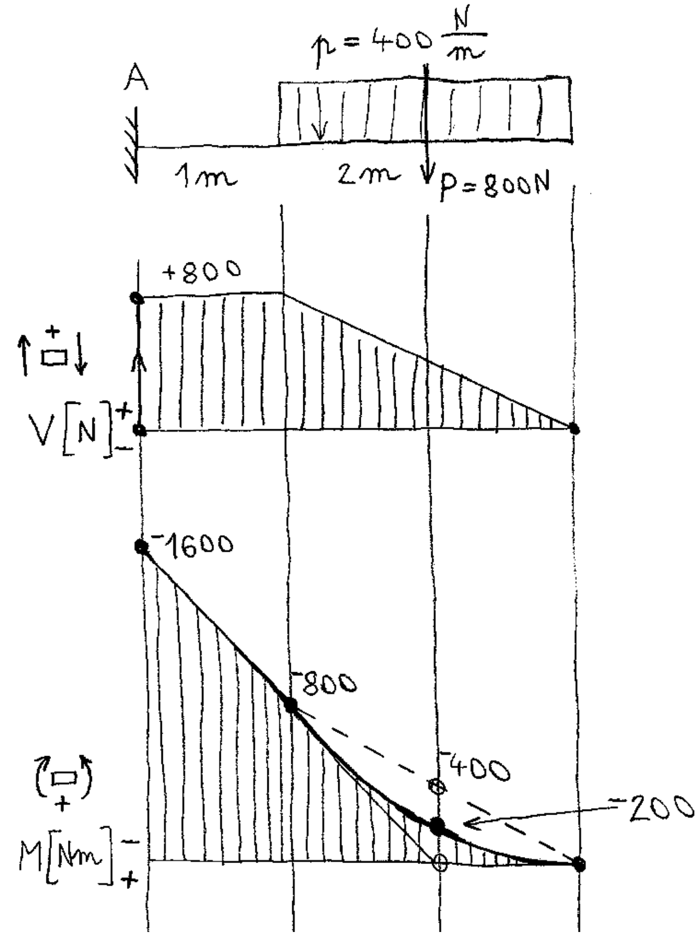
Számítsuk ki a reakciókat, és a jellemző értékek feltüntetésével rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!



Megjegyzés:
A megoszló teher intenzitása most felfelé mutat, ezért a nyíróerő ábra emelkedi, a nyomatéki ábra pedig felfelé domborodik.
A megoszló teher jobb szélén most nincs koncentrált erő, ezért a parabola jobb oldali végérintőjének meredeksége megegyezik a parabolától jobbra lévő szakasz meredekségével.

7. példa:

Rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!

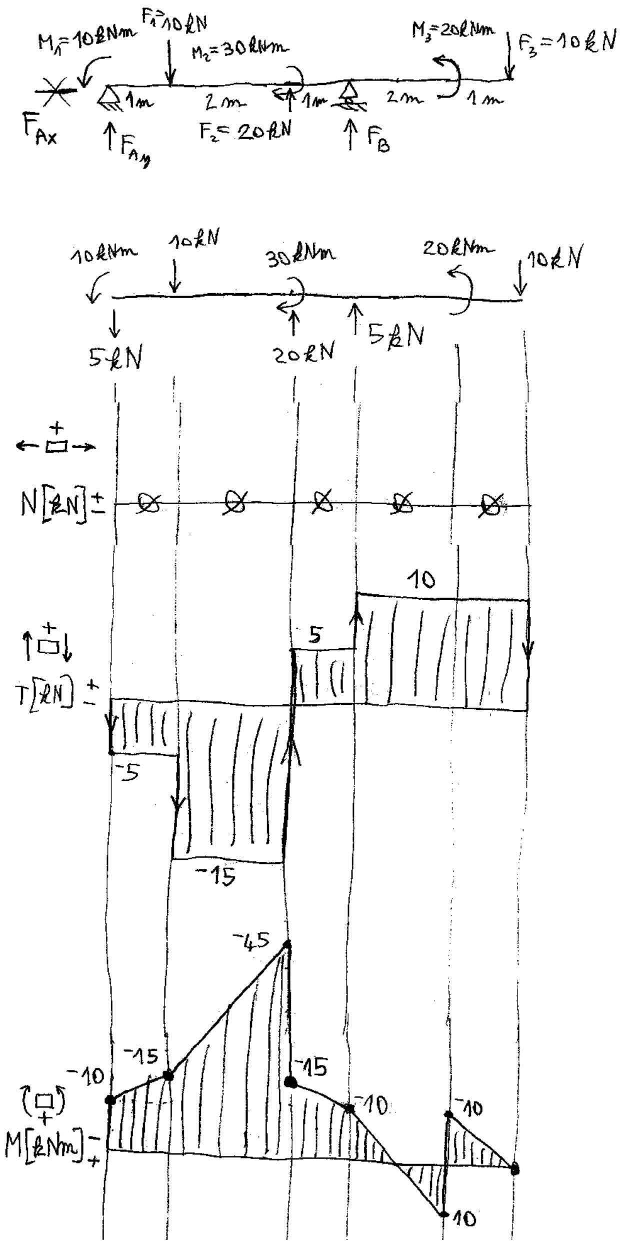


$$P = p \cdot 2 = 400 \cdot 2 = 800\ N$$

Megjegyzés:
A befogott tartók igénybevételi ábráit a reakcióerők kiszámítása nélkül is meg lehet rajzolni. Most ezt is csináltuk. Minden jellemző pontban úgy számítottuk ki az értéket, hogy jobbra néztünk. Emiatt a keresztmetszetnek sohasem kellett látnia a reakcióreőket.

8. példa: Egy kis kitérő: koncentrált erő és nyomaték egy helyen, a tartó belsejében.

Számítsuk ki a reakciókat, és a jellemző értékek feltüntetésével rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!



1.) $\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{F_{Ax}=0}$

2.) $\sum M_A = 0 = M_1 - F_1\cdot 1 - M_2 + F_2\cdot 3 + F_B\cdot 4 + M_3 - F_3\cdot 7$

$$\boxed{F_B = \frac{-M_1+F_1+M_2-3F_2-M_3+7F_3}{4}} =$$

$$= \frac{-10+10+30-3\cdot 20-20+7\cdot 10}{4} = \boxed{5\,kN\,(\uparrow)}$$

3.) $\sum F_y = 0 = F_{Ay} - F_1 + F_2 + F_B - F_3$

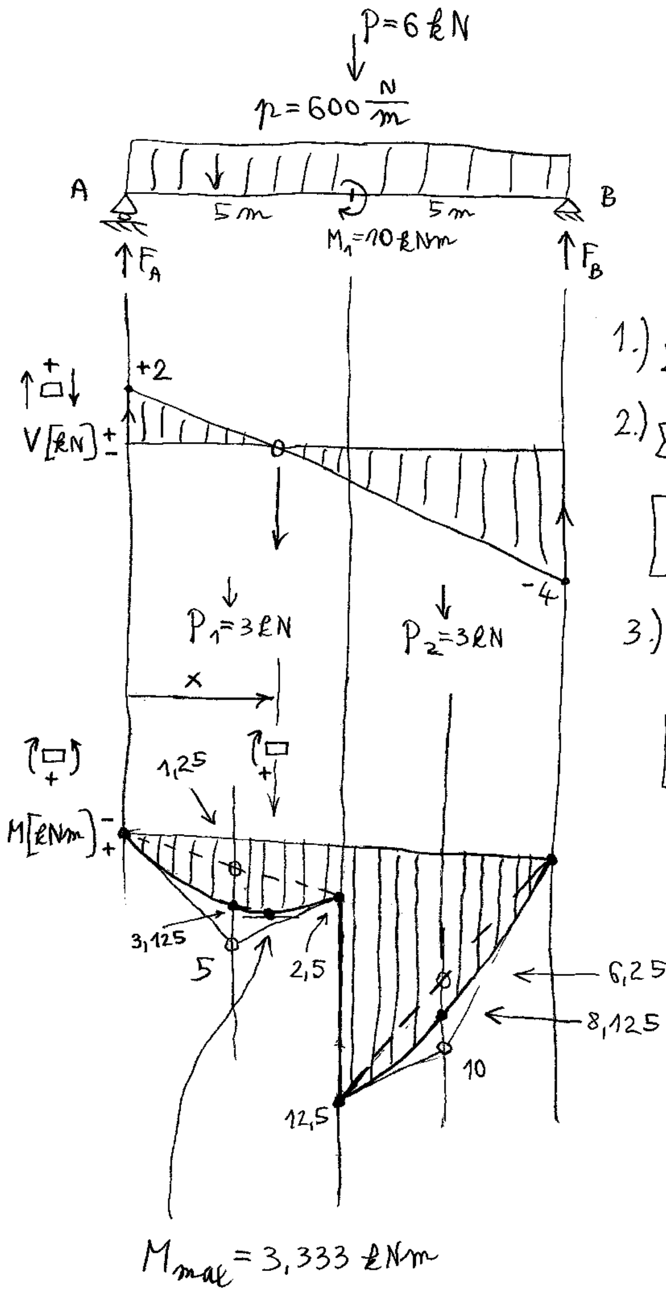
$$\boxed{F_{Ay} = F_1 - F_2 - F_B + F_3} =$$

$$= 10-20-5+10 = \boxed{-5\,kN\,(\downarrow)}$$

Megjegyzés:
Figyeljük meg, hogy a középső koncentrált erő és nyomaték párosnál a nyomatéki ábra szétszakad a nyomaték miatt, és a meredeksége is megváltozik a koncentrált erő miatt.
A jobb oldali koncentrált nyomatéknál csak szakadás van a nyomatéki ábrában, a meredekség nem változik.

9. példa: A 7. gyakorlat 1. feladata.

Számítsuk ki a reakciókat, és a jellemző értékek feltüntetésével rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!



$$P = p\ell = 0{,}6\cdot 10 = 6\,kN$$

1.) $\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{F_{Bx} = 0}$

2.) $\sum M_B = 0 = -F_A\cdot 10 + P\cdot 5 - M_1$

$$\boxed{F_A = \frac{5P - M_1}{10} = \frac{5\cdot 6 - 10}{10} = 2\,kN\,(\uparrow)}$$

3.) $\sum F_y = 0 = F_A - P + F_{By}$

$$\boxed{F_{By} = P - F_A = 6 - 2 = 4\,kN\,(\uparrow)}$$

$$V(x) = {}^{+}2 - px = 0$$

$$x = \frac{2}{0{,}6} = 3{,}333\,m$$

$$M_{max} = M(x) = F_A x - px\cdot\frac{x}{2} =$$

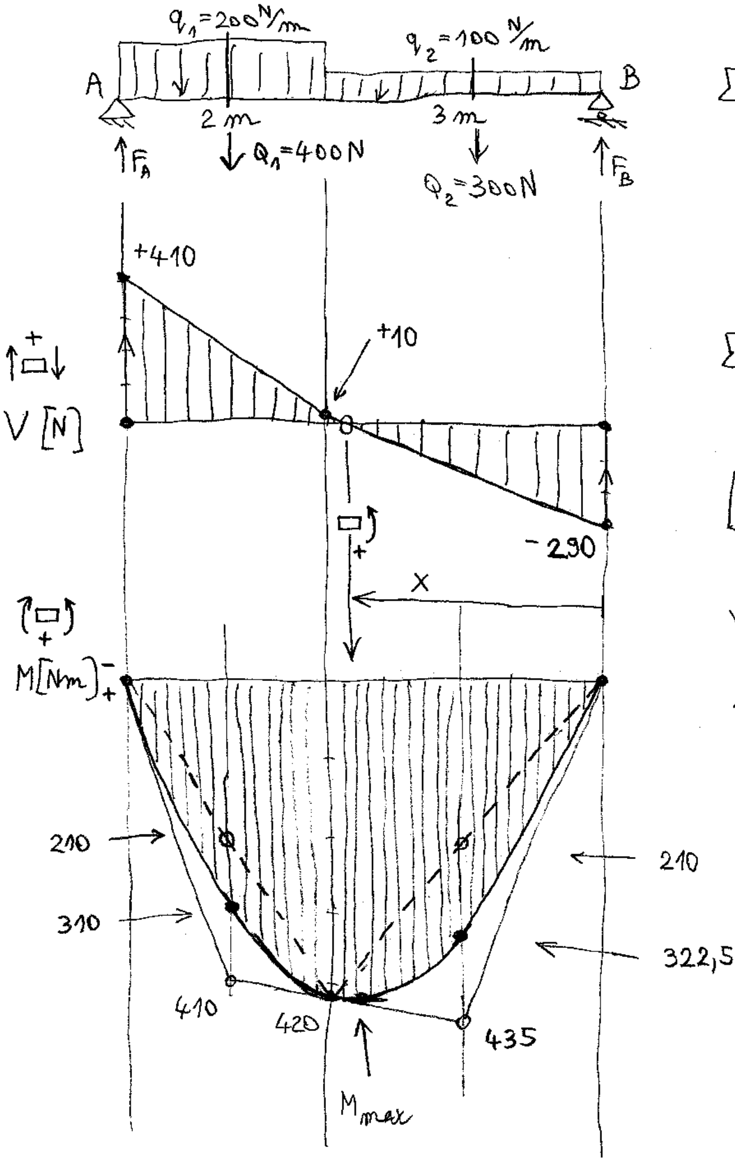
$$= 2\cdot 3{,}333 - 0{,}6\,\frac{3{,}333^2}{2} =$$

$$= {}^{+}3{,}333\,kNm$$

Megjegyzés:
A parabolát két részletben kellett megrajzolni, mert a koncentrált nyomaték miatt szakadás van a nyomatéki ábrában.

10. példa: A 7. gyakorlaton csak megemlített feladat.

Számítsuk ki a reakciókat, és a jellemző értékek feltüntetésével rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!



$$\sum M_A = 0 = -Q_1 \cdot 1 - Q_2 \cdot 3{,}5 + F_B \cdot 5$$

$$F_B = \frac{Q_1 + 3{,}5\,Q_2}{5} = \frac{400 + 3{,}5 \cdot 300}{5}$$

$$\boxed{F_B = 290\ N\ (\uparrow)}$$

$$\sum F_y = 0 = F_A - Q_1 - Q_2 + F_B$$

$$F_A = Q_1 + Q_2 - F_B = 400 + 300 - 290$$

$$\boxed{F_A = 410\ N\ (\uparrow)}$$

$$V(x) = -290 + q_2 x$$

$$x = \frac{F_B}{q_2} = \frac{290}{100} = 2{,}9\ m$$

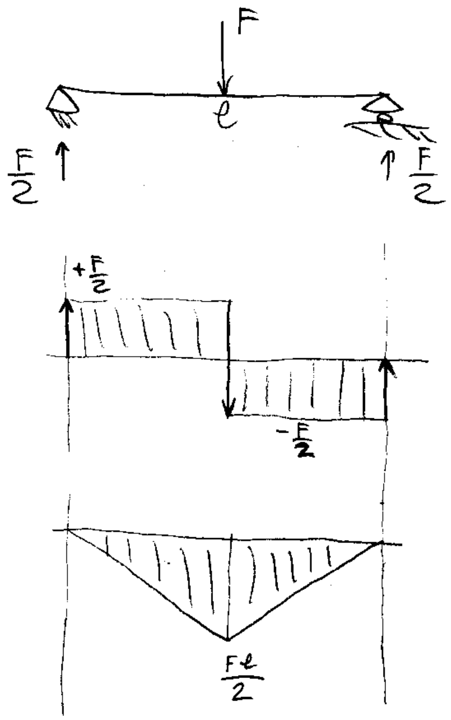
$$M_{max} = M(x) = F_B x - q_2 x \frac{x}{2} =$$

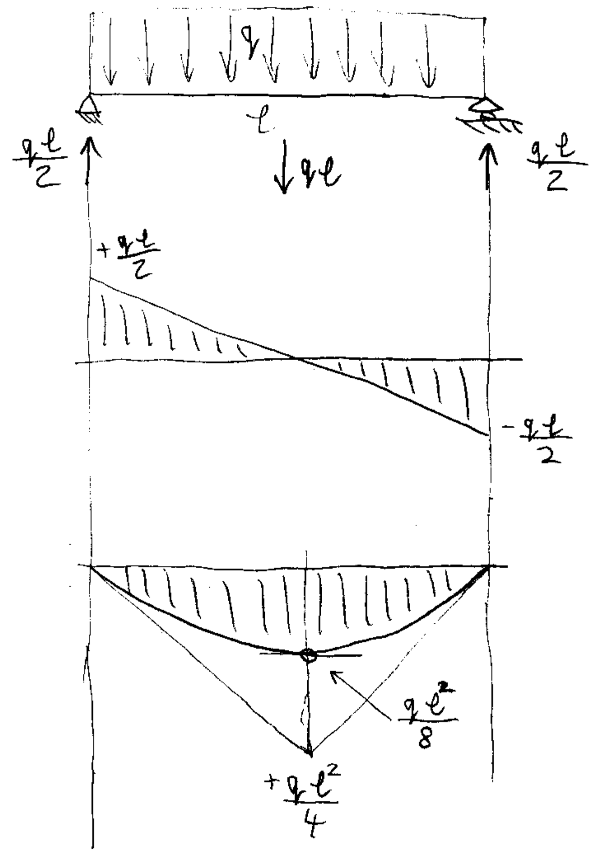
$$= 290 \cdot 2{,}9 - 100 \frac{2{,}9^2}{2} =$$

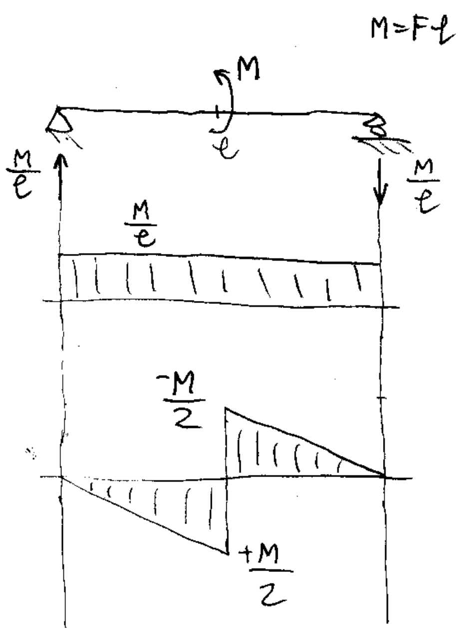
$$= +420{,}5\ Nm$$

Megjegyzés:
A különböző intenzitás érték miatt két külön parabola van. Mivel a két megoszló erő között nincs koncentrált erő vagy nyomaték, a nyomatéki ábra a határon érintősen folytonos (a két végérintő azonos vonalat alkot).

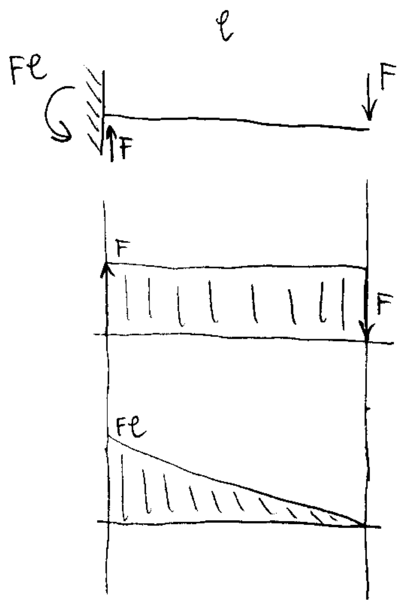
Néhány egyszerű kéttámaszú eset:
Gondolkodjuk el rajtuk!
Ilyenek vannak a minimum feladatok között is.

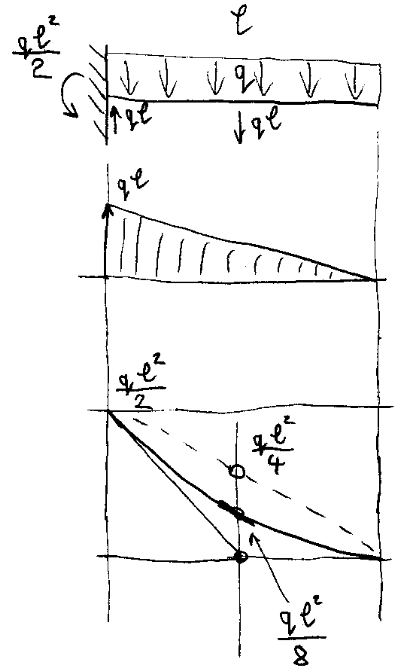


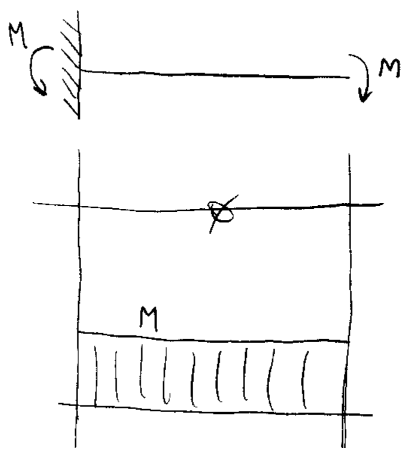




Néhány egyszerű konzolos eset:
Gondolkodjuk el rajtuk!
Ilyenek vannak a minimum feladatok között is.



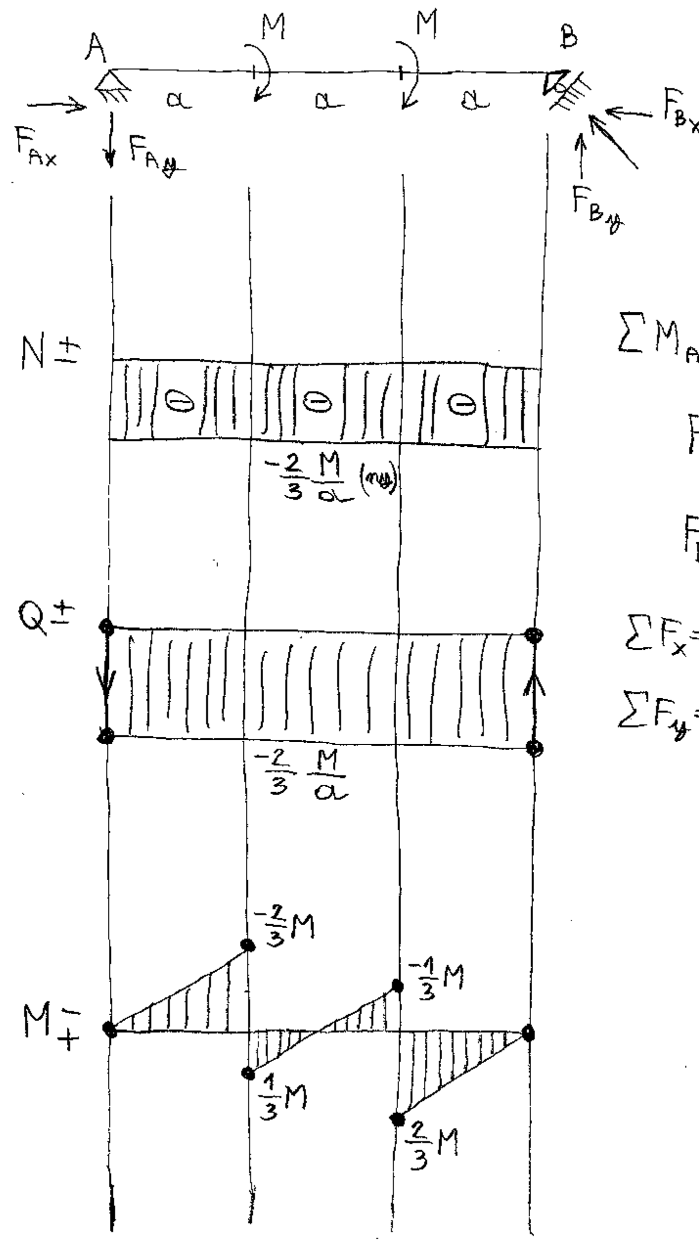




Régebbi, paraméteres feladatok:

11. példa:

Számítsuk ki a reakciókat, és a jellemző értékek feltüntetésével rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!



$$\sum M_A = 0 = -M - M + F_{By}\cdot 3a$$

$$F_{By} = \frac{2}{3}\frac{M}{a}\ (\uparrow)$$

$$F_{Bx} = F_{By} = \frac{2}{3}\frac{M}{a}\ (\leftarrow)$$

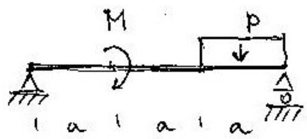
$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{Ax} = F_{Bx} = \frac{2}{3}\frac{M}{a}\ (\rightarrow)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{Ay} = F_{By} = \frac{2}{3}\frac{M}{a}\ (\downarrow)$$

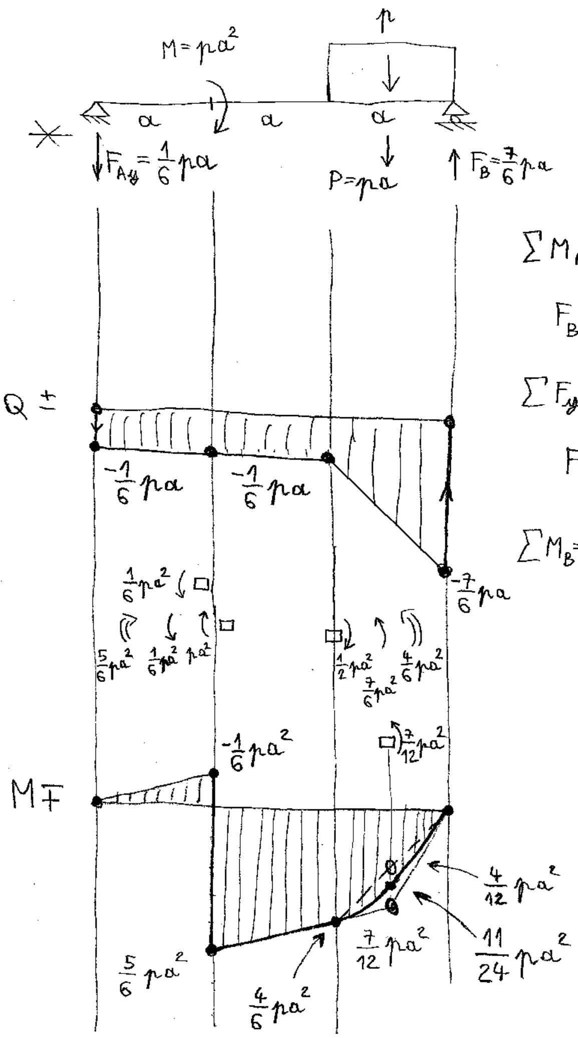
Megjegyzés:
Figyeljük meg a nyomatéki ábra szakadásait a koncentrált nyomatékoknál!

12. példa:

Számítsuk ki a reakciókat, és a jellemző értékek feltüntetésével rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!



$$M = pa^2$$



$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{Ax} = 0$

$\sum M_A = 0 = -(pa^2) - (pa) \cdot \frac{5}{2}a + F_B \cdot 3a$

$F_B = \frac{7}{6} pa \quad (\uparrow)$

$\sum F_y = 0 = -F_{Ay} - (pa) + F_B$

$F_{Ay} = -pa + \frac{7}{6} pa = +\frac{1}{6} pa \quad (\downarrow)$

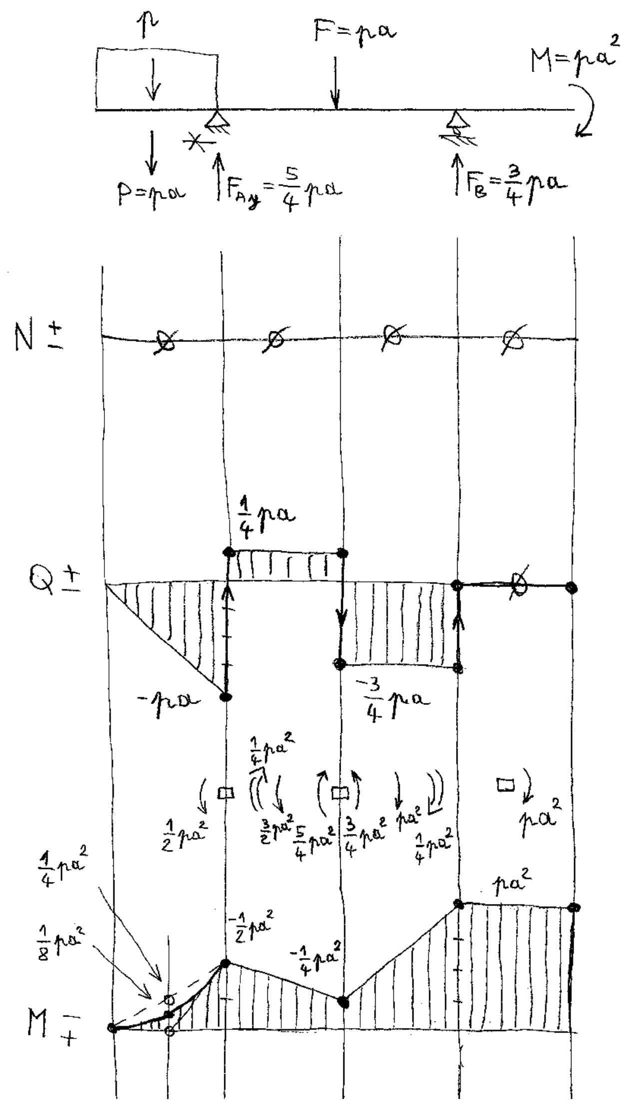
$\sum M_B = 0 = +\left(\frac{1}{6} pa\right) \cdot 3a - (pa^2) + (pa) \cdot \frac{a}{2} = 0$ ✓ok

Megjegyzés:
A megoszló teher szélén nincs koncentrált erő, ezért a nyomatéki ábra érintősen csatlakozik.

13. példa:

Számítsuk ki a reakciókat, és a jellemző értékek feltüntetésével rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!

$F = pa \qquad M = Fa$



$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A = 0 = +P\frac{a}{2} - F\cdot a + F_B\cdot 2a - M =$$

$$= (pa)\frac{a}{2} - (pa)\cdot a + F_B\cdot 2a - (pa^2)$$

$$F_B = \frac{3}{4}pa \ (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 = -P + F_{Ay} - F + F_B =$$

$$= -(pa) + F_{Ay} - (pa) + \left(\frac{3}{4}pa\right)$$

$$F_{Ay} = \frac{5}{4}pa \ (\uparrow)$$

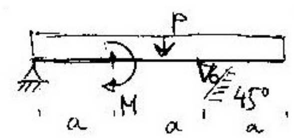
$$\sum M_B = P\cdot\frac{5}{2}a - F_{Ay}\cdot 2a + F\cdot a - M =$$

$$= (pa)\frac{5}{2}a - \left(\frac{5}{4}pa\right)\cdot 2a + (pa)\cdot a - pa^2 =$$

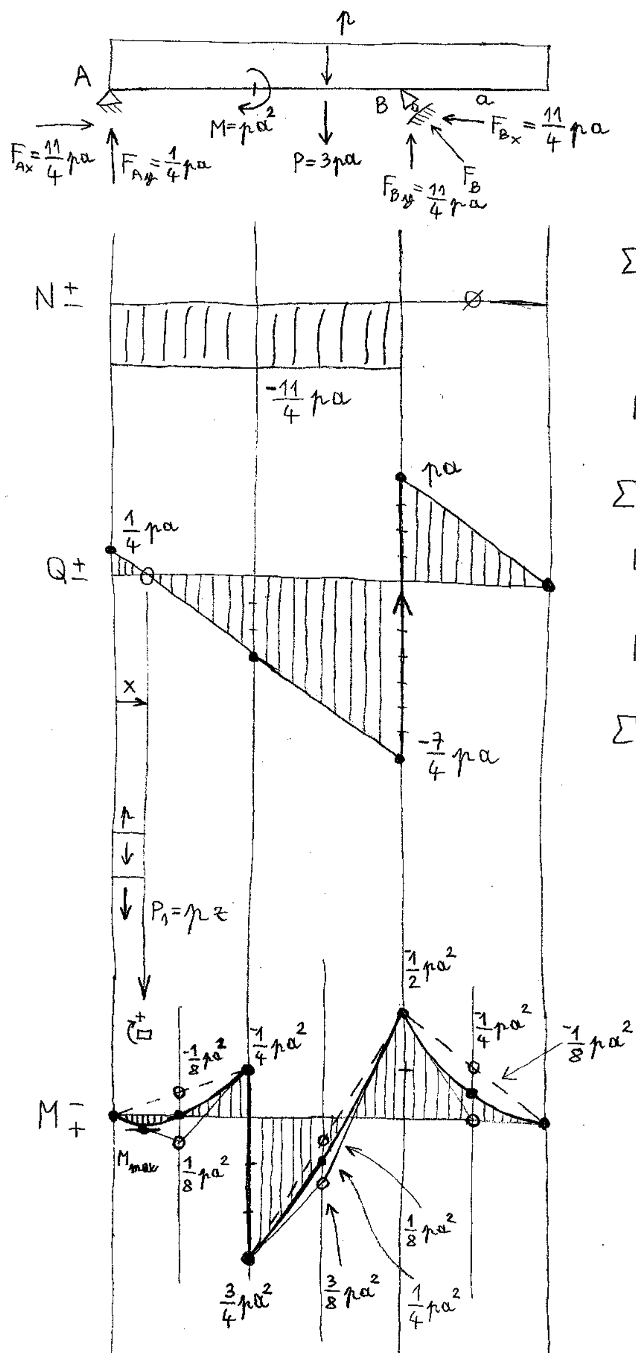
$$= 0 \quad \checkmark \text{OK}$$

14. példa:

Számítsuk ki a reakciókat, és a jellemző értékek feltüntetésével rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!



$M = pa^2$



$$\sum M_A = 0 = -M - P\cdot\frac{3}{2}a + F_{By}\cdot 2a =$$

$$= -(pa^2) - (3pa)\cdot\frac{3}{2}a + F_{By}\cdot 2a$$

$$F_{By} = \frac{11}{4}pa \ (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 = F_{Ay} - P + F_{By} = F_{Ay} - (3pa) + \left(\frac{11}{4}pa\right)$$

$$F_{Ay} = \frac{1}{4}pa \ (\uparrow)$$

$$F_{Bx} = F_{By} = \frac{11}{4}pa \ (\leftarrow)$$

$$\sum F_x = 0 = F_{Ax} - F_{Bx}$$

$$F_{Ax} = \frac{11}{4}pa \ (\rightarrow)$$

$$Q(z) = \frac{1}{4}pa - pz = 0$$

$$z = \frac{1}{4}a$$

$$M_{max} = M(z) =$$

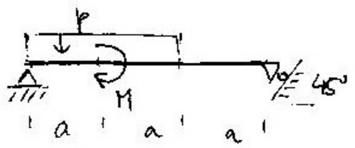
$$= F_{Ay}\cdot z - (pz)\frac{z}{2} = F_{Ay}\cdot z - P_1\frac{z}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{4}pa\right)\left(\frac{1}{4}a\right) - \frac{p}{2}\left(\frac{1}{4}a\right)^2 =$$

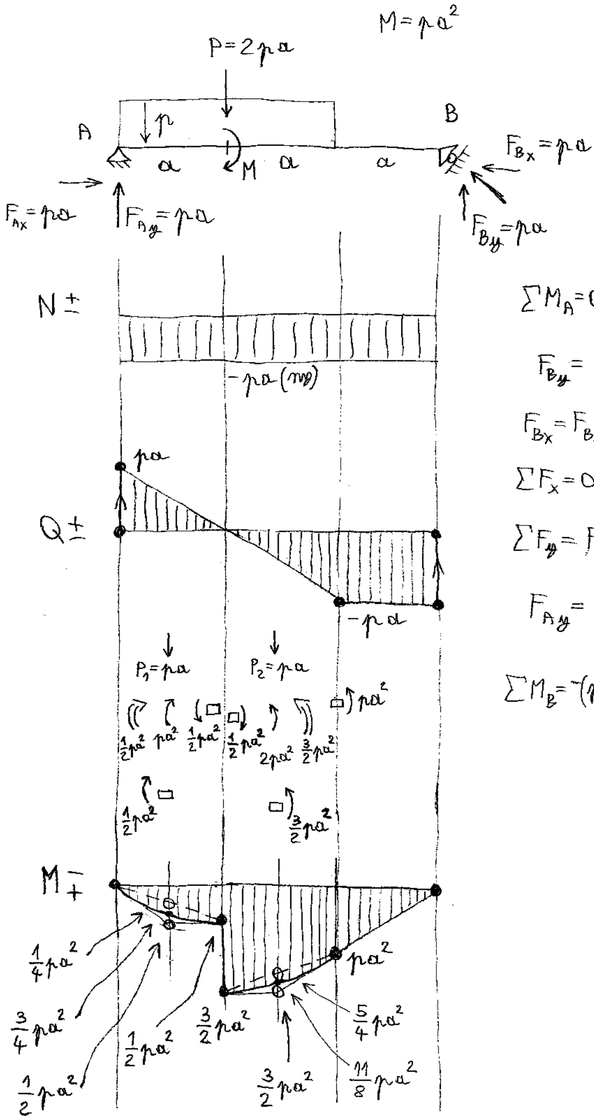
$$= \frac{1}{16}pa^2 - \frac{1}{32}pa^2 = \frac{1}{32}pa^2$$

15. példa:

Számítsuk ki a reakciókat, és a jellemző értékek feltüntetésével rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!



$$M = pa^2$$



$$\sum M_A = 0 = -(pa^2) - (2pa)\cdot a + F_{By}\cdot 3a$$

$$F_{By} = pa \ (\uparrow)$$

$$F_{Bx} = F_{By} = pa \ (\leftarrow)$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{Ax} = F_{Bx} = pa \ (\rightarrow)$$

$$\sum F_y = F_{Ay} - (2\cdot pa) + F_{By}$$

$$F_{Ay} = 2pa - (pa) = pa \ (\uparrow)$$

$$\sum M_B = -(pa)\cdot 3a - (pa^2) + (2pa)\cdot 2a = 0 \quad \checkmark \text{OK}$$

Megjegyzés:
A megoszló teher belsejében koncentrált nyomaték van, ezért a nyomatéki ábrában szakadás jelenik meg.
A megoszló teher szélén nincs koncentrált erő, ezért a nyomatéki ábra ott érintősen csatlakozik.