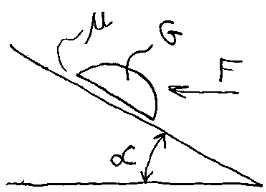
1a. példa:

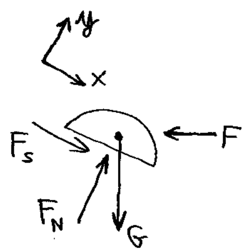
Mekkora F erő hatására mozdul meg éppen felfelé a G súlyú test az α szögű lejtőn?



$G = 300\ N$

$\alpha = 30^0$

$\mu = 0{,}4$



1.) $\sum F_x = 0 = F_s + G \sin\alpha - F \cos\alpha$

2.) $\sum F_y = 0 = F_N - G \cos\alpha - F \sin\alpha$

3.) $F_s = \mu F_N$

1.) $F_s = F\cos\alpha - G \sin\alpha$

2.) $F_N = F \sin\alpha + G \cos\alpha$

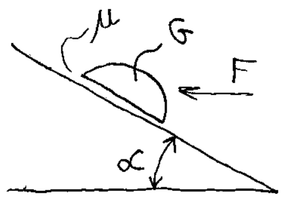
1,2→3.) $F \cos\alpha - G \sin\alpha = \mu F \sin\alpha + \mu G \cos\alpha$

$$\boxed{F = \frac{\sin\alpha + \mu \cos\alpha}{\cos\alpha - \mu \sin\alpha} G} = \frac{\sin 30^0 + 0{,}4 \cos 30^0}{\cos 30^0 - 0{,}4 \sin 30^0} \cdot 300 = \boxed{381{,}3\ N}$$

Megjegyzés:
A súrlódási erő lefelé mutat, mert akadályozni igyekszik a felfelé történő elmozdulást.

1b. példa:

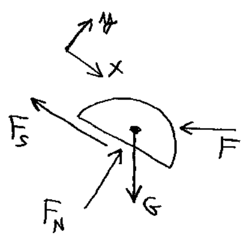
Meddig csökkenhet az F erő értéke, hogy a test még éppen ne mozduljon meg lefelé?



$G = 300\ N$

$\alpha = 30^\circ$

$\mu = 0{,}4$



1.) $\sum F_x = 0 = -F_s + G \sin\alpha - F\cos\alpha$

2.) $\sum F_y = 0 = F_N - G\cos\alpha - F\sin\alpha$

3.) $F_s = \mu F_N$

1.) $F_s = G\sin\alpha - F\cos\alpha$

2.) $F_N = G\cos\alpha + F\sin\alpha$

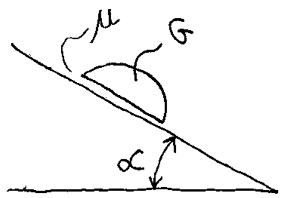
1,2 → 3.) $G\sin\alpha - F\cos\alpha = \mu G\cos\alpha + \mu F\sin\alpha$

$$\boxed{F = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} G = \frac{\sin 30^\circ - 0{,}4\cos 30^\circ}{\cos 30^\circ + 0{,}4\sin 30^\circ} \cdot 300 = 43{,}22\ N}$$

Megjegyzés:
A súrlódási erő most felfelé mutat, mert akadályozni igyekszik a lecsúszást.

1c. példa:

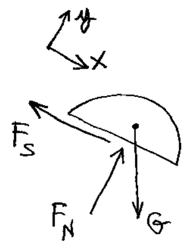
Mekkora az a lejtőszög, amelynél még éppen nem mozdul meg a test?



$G = 300\ N$

$\alpha = 30^\circ$

$\mu = 0{,}4$



1.) $\sum F_x = 0 = -F_s + G \sin \alpha$

2.) $\sum F_y = 0 = F_N - G \cos \alpha$

3.) $F_s = \mu F_N$

1.) $F_s = G \sin \alpha$

2.) $F_N = G \cos \alpha$

1,2→3.) $G \sin \alpha = \mu G \cos \alpha$

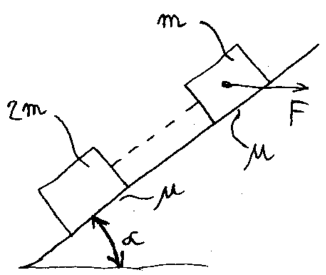
$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \mathrm{tg}\, \alpha = \mu = 0{,}4$$

$$\boxed{\alpha = 21{,}80^\circ}$$

Megjegyzés:
A súrlódási erő felfelé mutat, mert akadályozni igyekszik a lecsúszást.

2. példa:

Mekkora F erő esetén indul el felfelé?



$\alpha = 30^\circ$

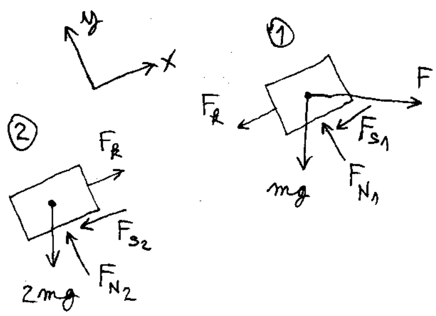
$m = 500\ kg$

$g = 10\ \frac{m}{s^2}$

$\mu = 0{,}2$

$F = ?$

– KF-2 4A M



1.) $\sum F_x^{(1)} = 0 = F\cos\alpha - F_k - F_{s_1} - mg\sin\alpha$

2.) $\sum F_y^{(1)} = 0 = F_{N_1} - F\sin\alpha - mg\cos\alpha$

3.) $F_{s_1} = \mu F_{N_1}$

4.) $\sum F_x^{(2)} = 0 = F_k - F_{s_2} - 2mg\sin\alpha$

5.) $\sum F_y^{(2)} = 0 = F_{N_2} - 2mg\cos\alpha$

6.) $F_{s_2} = \mu F_{N_2}$

5,6 → 4.) $F_k = 2mg\sin\alpha + 2\mu mg\cos\alpha$

2 → 3.) $F_{s_1} = \mu F\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$

3,4 → 1.) $0 = F\cos\alpha - 2mg\sin\alpha - 2\mu mg\cos\alpha - \mu F\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha$

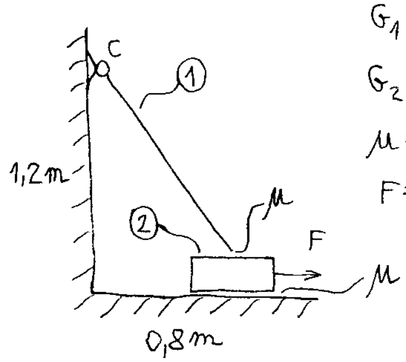
$$\boxed{F} = 3mg\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = 3\cdot 500\cdot 10\,\frac{\sin 30^\circ + 0{,}2\cos 30^\circ}{\cos 30^\circ - 0{,}2\sin 30^\circ} =$$

$$= \boxed{13182\ N}$$

Megjegyzés:
Most paraméteresen oldottuk meg az egyenletrendszer, és csak a végén helyettesítettük be az értékeket. Ha akarjuk, megoldhatjuk úgy is hogy kiszámoljuk az F_k-t, és numerikusan számolunk tovább.

3a. példa:

Mekkora erővel lehet a hasábot megmozdítani?

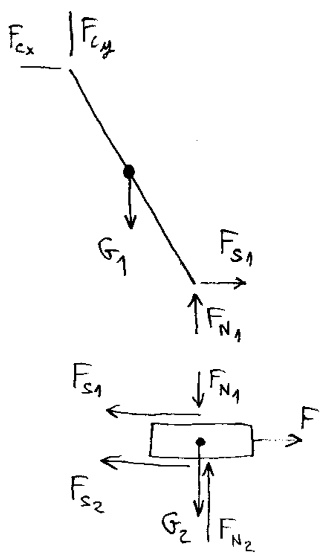


$G_1 = 450\,N$

$G_2 = 60\,N$

$\mu = \frac{1}{3}$

$F = ?$



1.) $\sum M_c^{(1)} = 0 = F_{N_1} \cdot 0{,}8 + F_{S_1} \cdot 1{,}2 - G_1 \cdot 0{,}4$

2.) $F_{S_1} = \mu F_{N_1}$

3.) $\sum F_x^{(2)} = 0 = F - F_{S_1} - F_{S_2}$

4.) $\sum F_y^{(2)} = 0 = F_{N_2} - F_{N_1} - G_2$

5.) $F_{S_2} = \mu F_{N_2}$

$2 \to 1.)$ $0 = 0{,}8 F_{N_1} + 1{,}2 \mu F_{N_1} - 0{,}4\, G_1$

$$F_{N_1} = \frac{0{,}4 G_1}{0{,}8 + 1{,}2\mu} = \frac{0{,}4 \cdot 450}{0{,}8 + 1{,}2 \cdot \frac{1}{3}} = 150\,N$$

2.) $F_{S_1} = \mu F_{N_1} = \frac{1}{3} \cdot 150 = 50\,N$

4.) $F_{N_2} = G_2 + F_{N_1} = 60 + 150 = 210\,N$

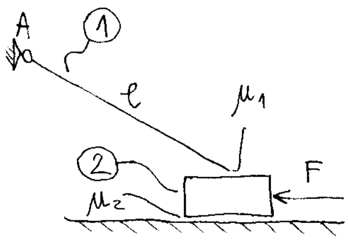
$4 \to 5.)$ $F_{S_2} = \frac{1}{3} \cdot 210 = 70\,N$

$2,5 \to 3.)$ $\boxed{F = F_{S_1} + F_{S_2} = 50 + 70 = 120\,N}$

3b. példa:

Mekkora erővel lehet a hasábot megmozdítani?

2002.06.06. 4B M

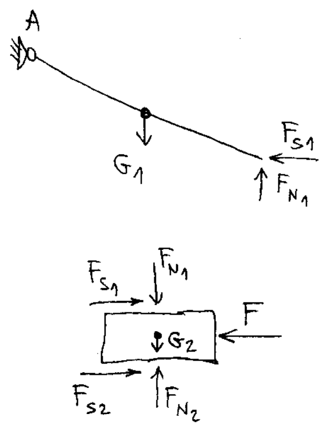


$G_1 = 400\,N$ $\quad \mu_1 = 0{,}3$

$G_2 = 600\,N$ $\quad \mu_2 = 0{,}2$

$\ell = 0{,}8\,m$ $\quad F = ?$

$\alpha = 30^\circ$ $\quad \alpha = ?$ (önzárás)



1.) $\sum M_A^{(1)} = 0 = -G_1 \frac{\ell}{2} \cos\alpha + F_{N_1} \ell \cos\alpha - F_{S_1} \ell \sin\alpha$

2.) $F_{S_1} = \mu_1 F_{N_1}$

3.) $\sum F_x^{(2)} = 0 = F_{S_1} + F_{S_2} - F$

4.) $\sum F_y^{(2)} = 0 = F_{N_2} - F_{N_1} - G_2$

5.) $F_{S_2} = \mu_2 F_{N_2}$

2→1.) $F_{N_1} = \dfrac{G_1 \frac{\ell}{2} \cos\alpha}{\ell \cos\alpha - \mu_1 \ell \sin\alpha} = \dfrac{G_1}{2(1 - \mu_1 \operatorname{tg}\alpha)}$

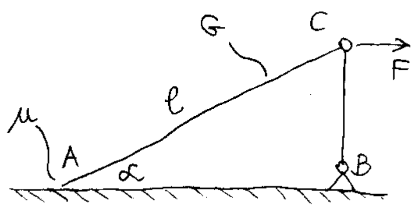
4.) $F_{N_2} = F_{N_1} + G_2$

4,5→3.) $F = F_{S_1} + F_{S_2} = \mu_1 F_{N_1} + \mu_2 F_{N_2} = \mu_1 F_{N_1} + \mu_2 (F_{N_1} + G_2) = (\mu_1 + \mu_2) F_{N_1} + \mu_2 G_2$

$$\boxed{F} = (\mu_1 + \mu_2) \frac{G_1}{2(1 - \mu_1 \operatorname{tg}\alpha)} + \mu_2 G_2 = (0{,}3 + 0{,}2) \frac{400}{2(1 - 0{,}3 \operatorname{tg} 30^\circ)} + 0{,}2 \cdot 600 = \boxed{241\,N}$$

4a. példa:

Mekkora erővel lehet a szerkezetet az elmozdulás határhelyzetébe hozni? Mekkora lesz ebben az állapotban az F_B reakcióerő?



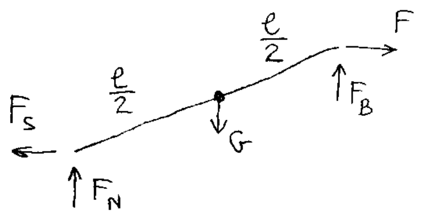
$\alpha = 30^\circ$

$\mu = 0{,}3$

$G = 500\,N$

$F = ?$

$F_B = ?$



$$1.)\ \sum M_C = 0 = G\frac{\ell}{2}\cos\alpha - F_N \ell \cos\alpha - F_S\, \ell \sin\alpha$$

$$2.)\ \sum F_x = 0 = F - F_S$$

$$3.)\ \sum F_y = 0 = F_N + F_B - G$$

$$4.)\ F_S = \mu F_N$$

$$4 \rightarrow 1.)\quad 0 = \frac{1}{2} G\cos\alpha - F_N \cos\alpha - \mu F_N \sin\alpha$$

$$F_N = \frac{G\cos\alpha}{2(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} = \frac{500\cos 30^\circ}{2(\cos 30^\circ + 0{,}3\sin 30^\circ)} = 213{,}1\,N$$

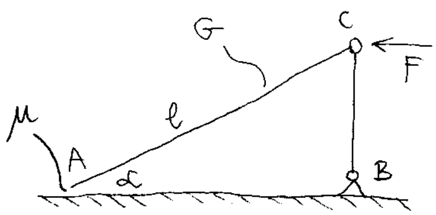
$$3.)\ \boxed{F_B} = G - F_N = 500 - 213{,}1 = \boxed{286{,}9\,N\ (\uparrow)}$$

$$4 \rightarrow 2.)\ \boxed{F} = F_S = \mu F_N = 0{,}3 \cdot 213{,}1 = \boxed{64{,}0\,N}$$

Megjegyzés:
Az y-irányú erőegyensúlyt (3. egyenlet) csak az F_B kiszámításához használtuk. Ha csak a megmozdításhoz szükséges erőt kérdezték volna, ezt az egyenletet nem is írtuk volna fel.

4b. példa:

Mekkora erővel lehet a szerkezetet az elmozdulás határhelyzetébe hozni?



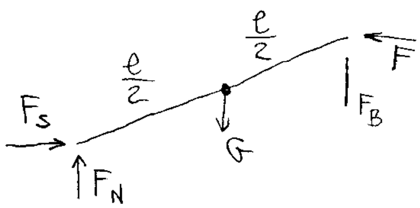
$\alpha = 30^\circ$

$\mu = 0{,}3$

$G = 500\ N$

$F = ?$

$\alpha = ?$ (önzárás)



1.) $\sum M_C = 0 = G\frac{\ell}{2}\cos\alpha - F_N \ell\cos\alpha + F_s \ell \sin\alpha$

2.) $\sum F_x = 0 = F_s - F$

3.) $F_s = \mu F_N$

2.) $F = F_s$

3.) $F_N = \frac{F_s}{\mu} = \frac{F}{\mu}$

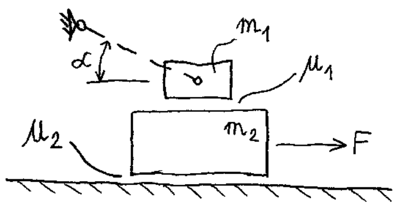
2,3 → 1.) $0 = \frac{1}{2} G\cos\alpha - \frac{F}{\mu}\cos\alpha + F\sin\alpha$

$$\boxed{F = \frac{\mu G\cos\alpha}{2(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}} = \frac{0{,}3\cdot 500\cdot\cos 30^\circ}{2(\cos 30^\circ - 0{,}3\sin 30^\circ)} = \boxed{90{,}7\ N}$$

Megjegyzés:
Most nem volt szükségünk az y irányú erőegyensúlyra.

5. példa:

Mekkora F erővel lehet az alsó tömeget az elmozdulás határhelyzetébe hozni? A szaggatott vonal kötelet jelöl.

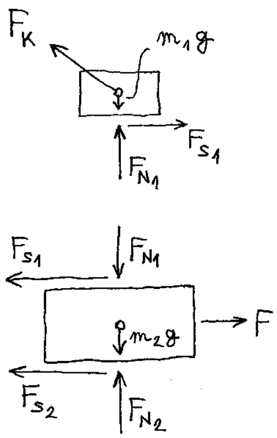


$m_1 = 3\,kg$ $\quad \alpha = 30^\circ$

$m_2 = 5\,kg$ $\quad g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

$\mu_1 = 0{,}7$ $\quad F = ?$

$\mu_2 = 0{,}5$



1.) $\sum F_x^{(1)} = 0 = -F_K \cos\alpha + F_{S1}$

2.) $\sum F_y^{(1)} = 0 = F_{N1} - m_1 g + F_K \sin\alpha$

3.) $F_{S1} = \mu_1 F_{N1}$

4.) $\sum F_x^{(2)} = 0 = F - F_{S1} - F_{S2}$

5.) $\sum F_y^{(2)} = 0 = F_{N2} - m_2 g - F_{N1}$

6.) $F_{S2} = \mu_2 F_{N2}$

3→1.) $F_K = \dfrac{F_{S1}}{\cos\alpha} = \dfrac{\mu_1 F_{N1}}{\cos\alpha}$

2.) $F_K = \dfrac{m_1 g - F_{N1}}{\sin\alpha}$

1=2.) $\dfrac{\mu_1 F_{N1}}{\cos\alpha} = \dfrac{m_1 g - F_{N1}}{\sin\alpha}$

$$\mu_1 F_{N1} \sin\alpha = m_1 g \cos\alpha - F_{N1}\cos\alpha$$

$$F_{N1} = \frac{m_1 g \cos\alpha}{\mu_1 \sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{3 \cdot 9{,}81 \cos 30^\circ}{0{,}7 \cdot \sin 30^\circ + \cos 30^\circ} = 20{,}96\ N$$

3.) $F_{S1} = \mu_1 F_{N1} = 0{,}7 \cdot 20{,}96 = 14{,}67\ N$

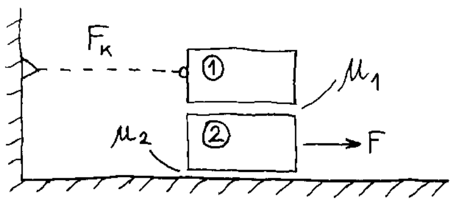
5.) $F_{N2} = m_2 g + F_{N1} = 5 \cdot 9{,}81 + 20{,}96 = 70{,}01\ N$

6.) $F_{S2} = \mu_2 F_{N2} = 0{,}5 \cdot 70{,}01 = 35{,}01\ N$

4.) $\boxed{F = F_{S1} + F_{S2} = 14{,}67 + 35{,}01 = 49{,}68\ N}$

6. példa: Az előzőhöz hasonló példa, csak most vízszintes a kötél.

Mekkora F erővel lehet az alsó tömeget az elmozdulás határhelyzetébe hozni? Mekkora az ehhez tartozó kötélerő?



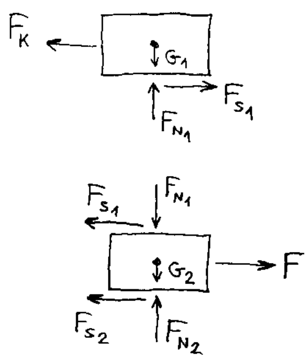
$G_1 = G_2 = 25\,N$

$\mu_1 = 0{,}4$

$\mu_2 = 0{,}3$

$F = ?$

$F_K = ?$



1.) $\sum F_x^{(1)} = 0 = F_{s_1} - F_K$

2.) $\sum F_y^{(1)} = 0 = F_{N_1} - G_1$

3.) $F_{s_1} = \mu_1 F_{N_1}$

4.) $\sum F_x^{(2)} = 0 = F - F_{s_1} - F_{s_2}$

5.) $\sum F_y^{(2)} = 0 = F_{N_2} - G_2 - F_{N_1}$

6.) $F_{s_2} = \mu F_{N_2}$

2.) $F_{N_1} = G_1 = 25\,N$

3.) $F_{s_1} = \mu_1 F_{N_1} = 0{,}4 \cdot 25 = 10\,N$

1.) $\boxed{F_K = F_{s_1} = 10\,N}$

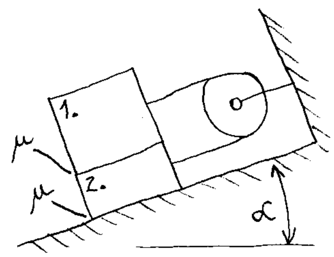
5.) $F_{N_2} = G_2 + F_{N_1} = 25 + 25 = 50\,N$

6.) $F_{s_2} = \mu_2 F_{N_2} = 0{,}3 \cdot 50 = 15\,N$

4.) $\boxed{F = F_{s_1} + F_{s_2} = 10 + 15 = 25\,N}$

7. példa: Mekkora lejtőszögnél mozdulnak meg a tömegek?

2000.06.06. 4B M

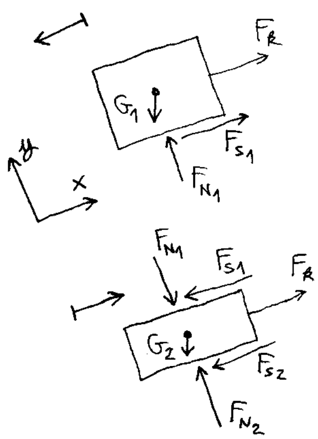


$\mu = 0{,}15$

$G_1 = 20\,N$

$G_2 = 10\,N$

$\alpha = ?$



1.) $\sum F_x^{(1)} = 0 = F_{S1} + F_k - G_1 \sin\alpha$

2.) $\sum F_y^{(1)} = 0 = F_{N1} - G_1 \cos\alpha$

3.) $F_{S1} = \mu F_{N1}$

4.) $\sum F_x^{(2)} = 0 = F_k - F_{S1} - F_{S2} - G_2 \sin\alpha$

5.) $\sum F_y^{(2)} = 0 = F_{N2} - F_{N1} - G_2 \cos\alpha$

6.) $F_{S2} = \mu F_{N2}$

2.) $F_{N1} = G_1 \cos\alpha$

2→3.) $F_{S1} = \mu G_1 \cos\alpha$

3→1.) $F_k = G_1 \sin\alpha - \mu G_1 \cos\alpha$

2→5.) $F_{N2} = G_2 \cos\alpha + G_1 \cos\alpha$

5→6.) $F_{S2} = \mu G_2 \cos\alpha + \mu G_1 \cos\alpha$

1,3,6→4.) $0 = (G_1 \sin\alpha - \mu G_1 \cos\alpha) - (\mu G_1 \cos\alpha) - (\mu G_2 \cos\alpha + \mu G_1 \cos\alpha) - G_2 \sin\alpha$

$$0 = (G_1 - G_2)\sin\alpha - (3\mu G_1 + \mu G_2)\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mu \frac{3G_1 + G_2}{G_1 - G_2} = 0{,}15 \frac{3 \cdot 20 + 10}{20 - 10} = 1{,}05$$

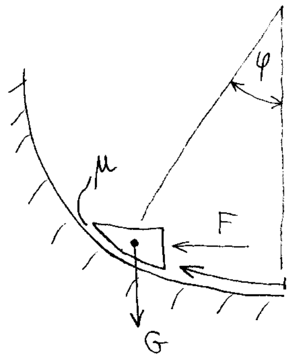
$$\boxed{\alpha = 46{,}40^\circ}$$

Megjegyzés:
Szemlélet alapján kitaláltuk, hogy a rendszer úgy indul majd el, hogy a nagyobb tömeg lefelé, a kisebb pedig felfelé mozdul. A súrlódási erők iránya pedig olyan, hogy a mozgás ellen hassanak.
A lejtővel párhuzamos koordinátarendszerben számoltunk, mert így csak a súlyerőket kellett komponensekre bontani, minden más erő a koordinátatengelyekkel párhuzamos volt.

8. példa: Ez már emelt szintű (szupergenyó) feladat, de azért érdemes megnézni.

Meddig tolható fel a vízszintes F=10 N erővel a test az íves pályán?

1998.06.16. 4A ∅

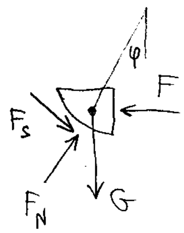


$\mu = 0{,}3$

$\varphi = ?$ (ahol megáll)

$F = 10\,N$

$G = 4\,N$



1.) $\sum F_x = 0 = F_N \sin\varphi + F_s \cos\varphi - F$

2.) $\sum F_y = 0 = F_N \cos\varphi - F_s \sin\varphi - G$

3.) $F_s = \mu F_N$

3→1.) $0 = F_N \sin\varphi + \mu F_N \cos\varphi - F$

$$F_N = \frac{F}{\sin\varphi + \mu\cos\varphi}$$

3→2.) $0 = F_N \cos\varphi - \mu F_N \sin\varphi - G$

$$F_N = \frac{G}{\cos\varphi - \mu\sin\varphi}$$

1.=2.) $$F(\cos\varphi - \mu\sin\varphi) = G(\sin\varphi + \mu\cos\varphi)$$

$$F(1 - \mu \operatorname{tg}\varphi) = G(\operatorname{tg}\varphi + \mu)$$

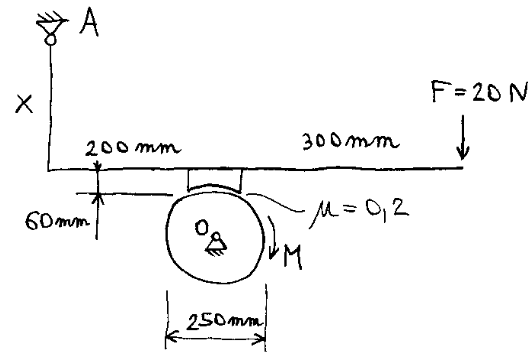
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F - \mu G}{G + \mu F} = \frac{10 - 0{,}3\cdot 4}{4 + 0{,}3\cdot 10} = 1{,}257$$

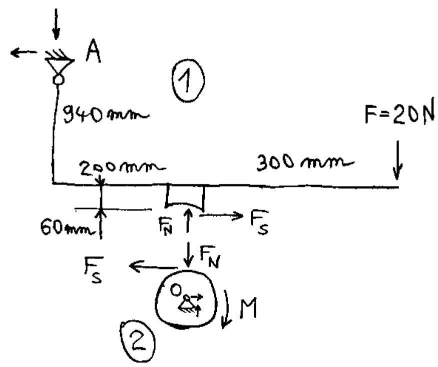
$$\boxed{\varphi = 51{,}50^\circ}$$

Megjegyzés:
Az egyenleteket a határhelyzethez tartozó szöghöz írtuk fel, amire aztán megoldottuk az egyenletrendszert.
A súrlódási erőt úgy irányítottuk, hogy akadályozza a felfelé mozgást.

9. példa:

Mekkora M nyomatékkal lehet a korongot megmozdítani?





1.) $\sum M_0^{(2)} = 0 = F_S \cdot 125 - M$

2.) $\sum M_A^{(1)} = 0 = F_N \cdot 200 + F_S \cdot 1000 - F \cdot 500$

3.) $F_S = \mu F_N$

3→2.) $$\frac{F_S}{\mu} \cdot 200 + F_S \cdot 1000 - F \cdot 500 = 0$$

$$F_S = \frac{500F}{\frac{200}{\mu} + 1000}$$

1.) $$\boxed{M} = 125 F_S = \frac{62\,500\,F}{\frac{200}{\mu} + 1000} =$$

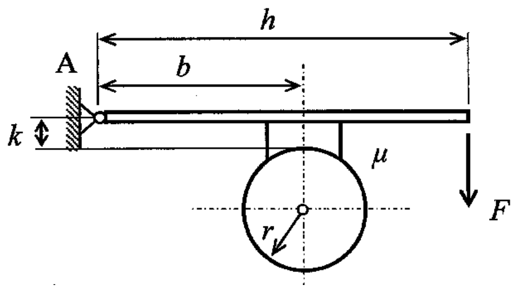
$$= \frac{62500 \cdot 20}{\frac{200}{0,2} + 1000} = \boxed{625\ Nmm}$$

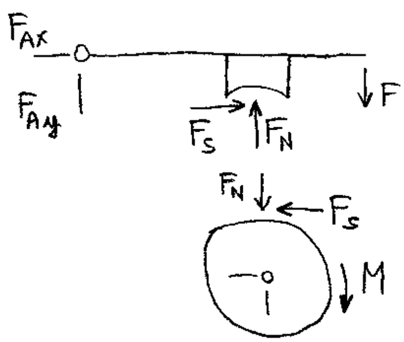
10a. példa:

Mekkora nyomatékkal fordítható el a tárcsa jobbra?

$h = 1000$ mm , $b = 600$ mm , $r = 200$ mm , $\mu = 0{,}4$, $F = 500$ N .

$k = 100$ mm





1.) $\sum M_A = 0 = F_N b + F_s k - F h$

2.) $F_s = \mu F_N$

3.) $\sum M_0 = F_s r - M$

2.) $F_N = \dfrac{F_s}{\mu}$

2→1.) $0 = \dfrac{F_s}{\mu} b + F_s k - F h$

$$F_s = \frac{F h}{\frac{b}{\mu} + k}$$

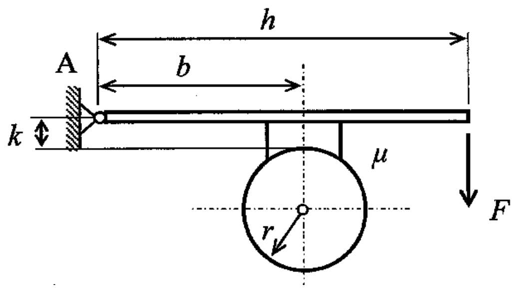
1→3.) $$\boxed{M = \frac{F h r}{\frac{b}{\mu} + k}} = \frac{500 \cdot 1 \cdot 0{,}2}{\frac{0{,}6}{0{,}4} + 0{,}1} = \boxed{62{,}5 \text{ Nm}}$$

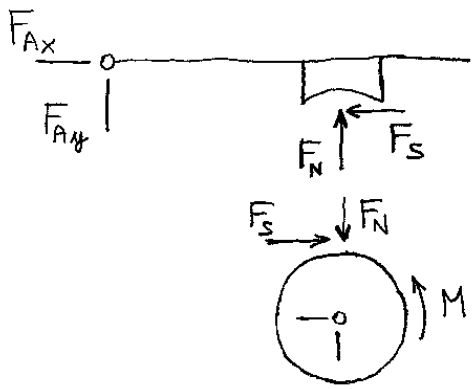
10b. példa:

Mekkora nyomatékkal fordítható el a tárcsa balra?

$h = 1000$ mm, $b = 600$ mm, $r = 200$ mm, $\mu = 0{,}4$, $F = 500$ N.

$k = 100$ mm





1.) $\sum M_A = 0 = F_N b - F_s k - F h$

2.) $F_s = \mu F_N$

3.) $\sum M_o = M - F_s r$

2.) $F_N = \dfrac{F_s}{\mu}$

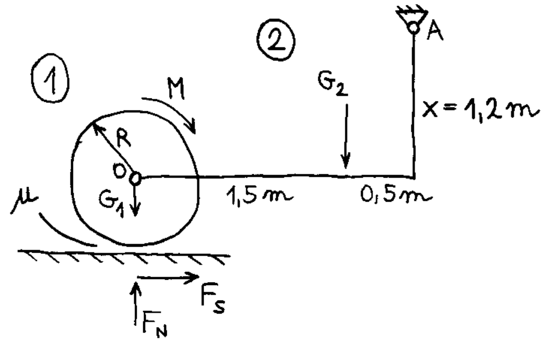
2→1.) $0 = \dfrac{F_s}{\mu} b - F_s k - F h$

$$F_s = \frac{F h}{\frac{b}{\mu} - k}$$

1→3.) $\boxed{M = \dfrac{F h r}{\frac{b}{\mu} - k}} = \dfrac{500 \cdot 1 \cdot 0{,}2}{\frac{0{,}6}{0{,}4} - 0{,}1} = \boxed{71{,}43 \text{ Nm}}$

11. példa:

Mekkora M nyomatékkal lehet a korongot megmozdítani?



$G_1 = 2\,kN$

$G_2 = 5\,kN$

$R = 1\,m$

$\mu = 0{,}25$

1.) $\sum M_O^{(1)} = 0 = F_S \cdot 1 - M$

2.) $\sum M_A^{(1+2)} = 0 = -M + G_1 \cdot 2 + G_2 \cdot 0{,}5 + F_S(1+x) - F_N \cdot 2$

3.) $F_S = \mu F_N$

1.) $F_S = M$

3.) $F_N = \dfrac{F_S}{\mu} = \dfrac{M}{\mu}$

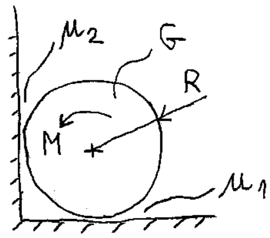
1,3 → 2.) $0 = -M + 2G_1 + 0{,}5\,G_2 + (1+x)M - 2\dfrac{M}{\mu}$

$$\boxed{M = \frac{2G_1 + 0{,}5\,G_2}{\frac{2}{\mu} - x} = \frac{2\cdot 2 + 0{,}5\cdot 5}{\frac{2}{0{,}25} - 1{,}2} = 0{,}9559\ kNm = 955{,}9\ Nm}$$

Megjegyzés:
Az 1. egyenlet átrendezett $F_S = M$ alakja elég hülyén néz ki, mert látszólag egy erő egyenlő egy nyomatékkal. Ez csak azért van, mert a korong sugarát sikerült pont 1 m-re választani, és az egyenletekbe a mértékegységet már nem írjuk be.

12. példa: A 13. gyakorlat 4. feladata.

Mekkora nyomatékkal forgatható meg a „sarokba szorított" korong?



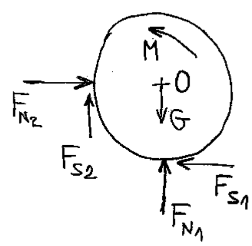
$G = 1025\ N$

$R = 0{,}5\ m$

$\mu_1 = 0{,}1$

$\mu_2 = 0{,}25$

$M = ?$



1.) $\sum F_x = 0 = F_{N_2} - F_{S_1}$

2.) $\sum F_y = 0 = F_{N_1} + F_{S_2} - G$

3.) $\sum M_0 = 0 = M - F_{S_1} R - F_{S_2} R$

4.) $F_{S_1} = \mu_1 F_{N_1}$

5.) $F_{S_2} = \mu_2 F_{N_2}$

$4 \to 1.)$ $0 = F_{N_2} - \mu_1 F_{N_1}$

$F_{N_2} = \mu_1 F_{N_1}$

$1 \to 5.)$ $F_{S_2} = \mu_2 \mu_1 F_{N_1}$

$5 \to 2.)$ $0 = F_{N_1} + \mu_1 \mu_2 F_{N_1} - G$

$$F_{N_1} = \frac{G}{1+\mu_1\mu_2} = \frac{1025}{1+0{,}1\cdot 0{,}25} = 1000\ N$$

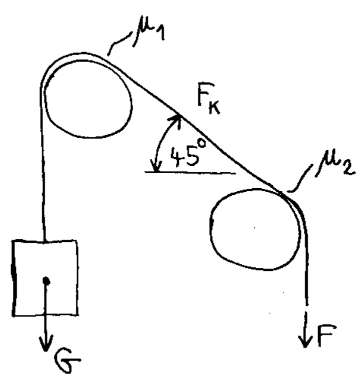
4.) $F_{S_1} = \mu_1 F_{N_1} = 0{,}1 \cdot 1000 = 100\ N$

5.) $F_{S_2} = \mu_1 \mu_2 F_{N_1} = 0{,}1 \cdot 0{,}25 \cdot 1000 = 25\ N$

3.) $\boxed{M = (F_{S_1} + F_{S_2}) R = (100+25) \cdot 0{,}5 = 62{,}5\ Nm}$

Kötélsúrlódás

13. példa:
Mekkora F erővel lehet a kötél végére akasztott G súlyt felfelé megmozdítani?
Milyen határok között lehet az F erő, hogy a kötél végére akasztott G súly nyugalomban maradjon?



$G = 100\ N$

$\mu_1 = 0{,}1$

$\mu_2 = 0{,}2$

Átfogási szögek: $\alpha_1 = 90 + 45 = 135^\circ = 2{,}356\ rad$

$\alpha_2 = 90 - 45 = 45^\circ = 0{,}7854\ rad$

a.) Elmozdul felfelé:

$G < F_K < F$

1.) $F_K = G\, e^{\mu_1 \alpha_1}$

2.) $F = F\, e^{\mu_2 \alpha_2}$

1→2.) $\underline{F} = G\, e^{\mu_1 \alpha_1} e^{\mu_2 \alpha_2} = G\, e^{(\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2)} = 100\, e^{(0{,}1 \cdot 2{,}356 + 0{,}2 \cdot 0{,}7854)} = \underline{148{,}1\ N}$

b.) Elmozdul lefelé:

$G > F_K > F$

1.) $G = F_K\, e^{\mu_1 \alpha_1}$

2.) $F_K = F\, e^{\mu_2 \alpha_2}$

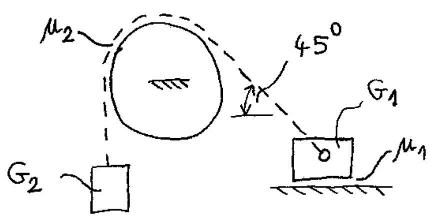
1→2.) $\underline{F} = \dfrac{G}{e^{\mu_1 \alpha_1} + e^{\mu_2 \alpha_2}} = G\, e^{-(\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2)} = 100\, e^{-(0{,}1 \cdot 2{,}356 + 0{,}2 \cdot 0{,}7854)} = \underline{67{,}52\ N}$

$$\boxed{67{,}52 < F < 148{,}1\ N}$$

Megjegyzés:
Fontos, hogy az átfogási szöget radiánban kell behelyettesíteni a súrlódási képletbe!

14. példa: A 13. gyakorlat 5. feladata.

Legalább mekkora G_2 súlyra van szükség a rendszer megmozdításához?

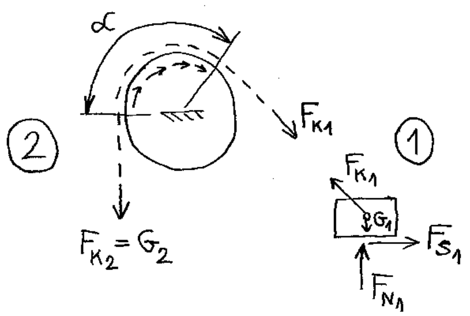


$G_1 = 1100\ \mathrm{N}$

$\mu_1 = 0{,}1$

$\mu_2 = 0{,}2$

$G_2 = ?$



$\alpha = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi\ \mathrm{rad}$

1.) $F_{K_2} = F_{K_1} e^{\mu_2 \alpha} \quad \leftarrow F_{K_2} > F_{K_1}$

2.) $\sum F_x^{(1)} = 0 = F_{S_1} - F_{K_1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.) $\sum F_y^{(1)} = 0 = F_{N_1} - G_1 + F_{K_1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

4.) $F_{S_1} = \mu_1 F_{N_1}$

2.) $F_{S_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} F_{K_1}$

3.) $F_{N_1} = G_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{K_1}$

2,3 → 4.)

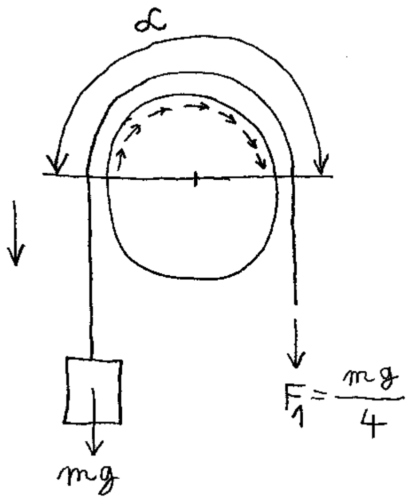
$$\frac{\sqrt{2}}{2} F_{K_1} = \mu_1 G_1 - \mu_1 \frac{\sqrt{2}}{2} F_{K_1}$$

$$F_{K_1} = \frac{\sqrt{2}\ \mu_1 G_1}{1 + \mu_1} = \frac{\sqrt{2} \cdot 0{,}1 \cdot 1100}{1 + 0{,}1} = 141{,}4\ \mathrm{N}$$

1.) $\boxed{G_2} = F_{K_2} = F_{K_1} e^{\mu_2 \alpha} = 141{,}4\, e^{0{,}2 \cdot \frac{3}{4}\pi} = \boxed{226{,}5\ \mathrm{N}}$

15. példa:

Legalább mekkorának kell lennie a kötél és a rögzített henger közötti súrlódási tényezőnek, hogy az mg súly negyedakkora erővel megtartható legyen?



$$\alpha = 180^\circ = \pi \text{ rad}$$

$$mg > F_1$$

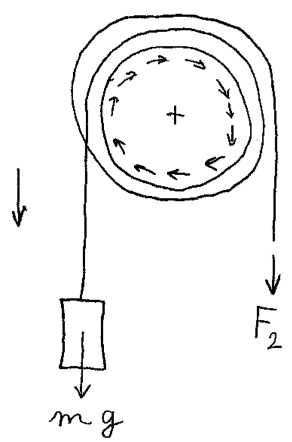
$$mg = F_1 e^{\mu\alpha} = \frac{mg}{4} e^{\mu\pi}$$

$$4 = e^{\mu\pi}$$

$$\ln 4 = \mu\pi$$

$$\boxed{\mu = \frac{\ln 4}{\pi}}$$

Mekkora erővel tudjuk megtartani a súlyt, ha az előbb kiszámolt súrlódási tényező mellett kétszer is áttekerjük a kötelet a hengeren?



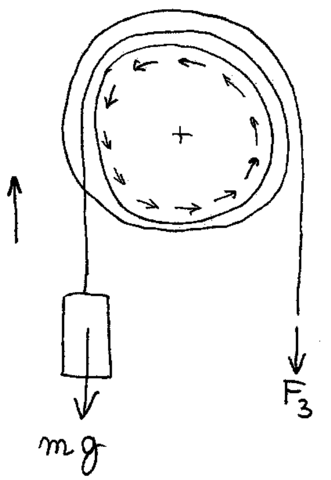
$$\alpha = 540^\circ = 3\pi \text{ rad}$$

$$mg > F_2$$

$$mg = F_2 e^{\mu\alpha} = F_2 e^{\frac{\ln 4}{\pi}\cdot 3\pi} = F_2 e^{3\ln 4} = F_2\cdot\left(e^{\ln 4}\right)^3 = F_2\cdot 4^3$$

$$\boxed{F_2 = \frac{mg}{64}}$$

Mekkora erővel tudjuk megmozdítani felfelé a súlyt kétszeres áttekerés és változatlan súrlódási együttható esetén?



$\alpha = 540^\circ = 3\pi$ rad

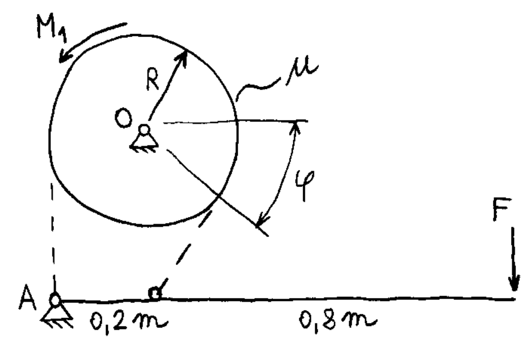
$mg < F_3$

$$\boxed{F_3} = mg\, e^{\mu\alpha} = mg\, e^{\frac{\ln 4}{\pi}\cdot 3\pi} = mg\, e^{3\ln 4} = mg\, e^{\ln 4^3} =$$

$$= mg \cdot 4^3 = \boxed{64\, mg}$$

Megjegyzés:
A kis nyilak a kötélre ható súrlódási erőt jelképezik.
A kétszeres áttekerés esetén az átfogási szög több, mint egy teljes kör.
Fontos, hogy az átfogási szöget radiánban kell behelyettesíteni a súrlódási képletbe!

16a.példa: Mekkora M_1 nyomatékkal lehet a korongot megmozdítani? A szaggatott vonal a korongon átvetett kötelet jelképezi.

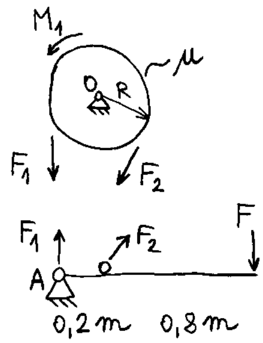


$F = 100\ N$

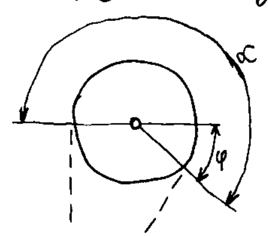
$R = 0{,}2\ m$

$\mu = 0{,}3$

$\varphi = 45^\circ$



Átfogási szög:



$\alpha = 180^\circ + \varphi = 180^\circ + 45^\circ =$

$= 225^\circ = 3{,}927\ rad$

$\alpha = \pi + \varphi = \pi + \frac{\pi}{4} =$

$= \frac{5}{4}\pi = 3{,}927\ rad$

1.) $\sum M_A = 0 = F_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0{,}2 - F \cdot 1$

2.) $\sum M_0 = 0 = F_1 R - F_2 R + M_1$

3.) $F_2 = F_1 e^{\mu\alpha} \leftarrow F_2 > F_1$

1.) $F_2 = 5\sqrt{2}\, F = 5\sqrt{2} \cdot 100 = 707{,}1\ N$

3.) $F_1 = \frac{F_2}{e^{\mu\alpha}} = \frac{707{,}1}{e^{0{,}3 \cdot 3{,}927}} = 217{,}7\ N$

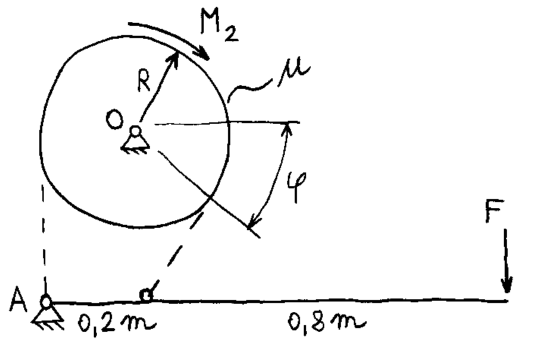
2.) $\boxed{M_1} = (F_2 - F_1) R = (707{,}1 - 217{,}7) \cdot 0{,}2 = \boxed{97{,}88\ Nm}$

Megjegyzések:

Fontos, hogy az átfogási szöget radiánban kell behelyettesíteni a súrlódási képletbe!

A forgásirány alapján most $F_2 > F_1$ (a két erő nyomatékának különbsége az elfordulás ellen hat), ezért $F_2 = F_1 e^{\mu\alpha}$.

16b.példa: Mekkora M_2 nyomatékkal lehet a korongot megmozdítani? A szaggatott vonal a korongon átvetett kötelet jelképezi.

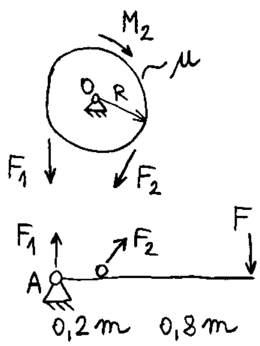


$F = 100\ N$

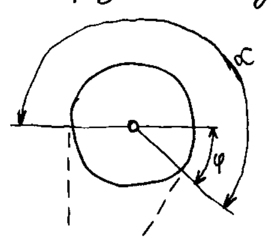
$R = 0{,}2\ m$

$\mu = 0{,}3$

$\varphi = 45^\circ$



Átfogási szög:



$\alpha = 180^\circ + \varphi = 180^\circ + 45^\circ =$

$= 225^\circ = 3{,}927\ rad$

$\alpha = \pi + \varphi = \pi + \frac{\pi}{4} =$

$= \frac{5}{4}\pi = 3{,}927\ rad$

1.) $\sum M_A = 0 = F_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0{,}2 - F \cdot 1$

2.) $\sum M_0 = 0 = F_1 R - F_2 R - M_2$

3.) $F_1 = F_2\, e^{\mu\alpha} \leftarrow F_1 > F_2$

1.) $F_2 = 5\sqrt{2} \cdot F = 5\sqrt{2} \cdot 100 = 707{,}1\ N$

3.) $F_1 = F_2\, e^{\mu\alpha} = 707{,}1\, e^{0{,}3 \cdot 3{,}927} = 2297\ N$

2.) $\boxed{M_2 = (F_1 - F_2)R = (2297 - 707{,}1) \cdot 0{,}2 = 318{,}0\ Nm}$

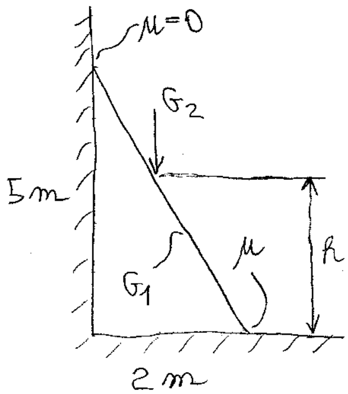
Megjegyzések:

Fontos, hogy az átfogási szöget radiánban kell behelyettesíteni a súrlódási képletbe!

A forgásirány alapján most $F_1 > F_2$ (a két erő nyomatékának különbsége az elfordulás ellen hat), ezért $F_1 = F_2 e^{\mu\alpha}$.

17. példa: A 13. gyakorlat 7. feladata.

Legfeljebb milyen magasra mászhatunk a létrán baleset nélkül?

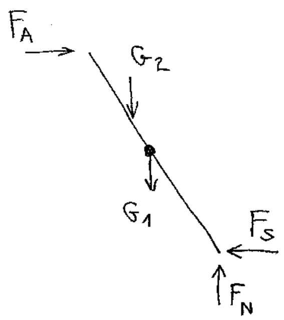


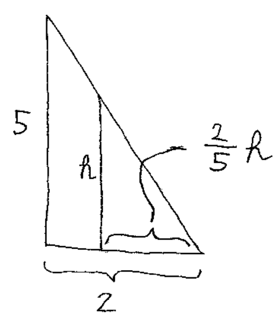
$G_1 = 400\,N$

$G_2 = 800\,N$

$\mu = 0{,}3$

$h = ?$





$$1.)\ \sum M_A = 0 = -G_1\cdot 1 + F_N\cdot 2 - F_s\cdot 5 - G_2\left(2-\frac{2}{5}h\right)$$

$$2.)\ \sum F_y = 0 = F_N - G_1 - G_2$$

$$3.)\ F_s = \mu F_N$$

$$2.)\ F_N = G_1 + G_2 = 400+800 = 1200\ N$$

$$3.)\ F_s = \mu F_N = 0{,}3\cdot 1200 = 360\ N$$

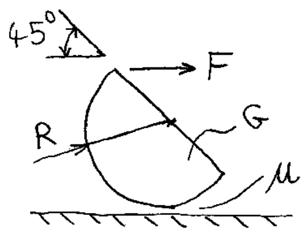
$$1.)\ G_2\left(2-\frac{2}{5}h\right) = 2F_N - 5F_s - G_1$$

$$\boxed{h} = \frac{5}{2}\left(2-\frac{2F_N-5F_s-G_1}{G_2}\right) = 5\left(1-\frac{2F_N-5F_s-G_1}{2G_2}\right) =$$

$$= 5\left(1-\frac{2\cdot 1200-5\cdot 360-400}{2\cdot 800}\right) = \boxed{4{,}375\ m}$$

18. példa: A 13. gyakorlat 8. feladata.

Mekkora vízszintes F erővel tudjuk 45°-os szögben megtartani a félkör alakú testet? A test és a talaj közötti súrlódási együtthatónak legalább mekkorának kell lennie, hogy létrejöhessen az egyensúlyi állapot?

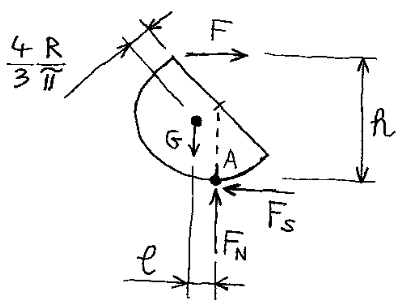


$G = 100\ \mathrm{N}$

$R = 0{,}5\ \mathrm{m}$

$F = ?$

$\mu = ?$



$$\ell = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{4}{3}\,\frac{R}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{4}{3}\,\frac{0{,}5}{\pi} = 0{,}15\ \mathrm{m}$$

$$h = R + \frac{\sqrt{2}}{2}R = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 0{,}5 = 0{,}8536\ \mathrm{m}$$

1.) $\sum M_A = 0 = G\ell - Fh$

2.) $\sum F_x = 0 = F - F_s$

3.) $\sum F_y = 0 = F_N - G$

1.) $\boxed{F = G\frac{\ell}{h} = 100\,\frac{0{,}15}{0{,}8536} = 17{,}57\ \mathrm{N}}$

2.) $F_s = F = 17{,}57\ \mathrm{N}$

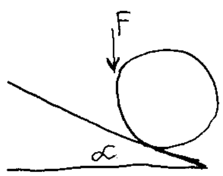
3.) $F_N = G = 100\ \mathrm{N}$

$$F_s = \mu F_N \rightarrow \boxed{\mu = \frac{F_s}{F_N} = \frac{17{,}57}{100} = 0{,}1757}$$

Megjegyzés:
Ha a súrlódási együttható értéke a kiszámítottnál a kisebb, akkor hiába elegendő nagy az F erő értéke, a test nem marad nyugalomban, mert megcsúszik a talajon.

19. példa:

Mekkora F erővel lehet egy helyben tartani a korongot a lejtőn? Mekkora az ehhez szükséges súrlódási tényező?



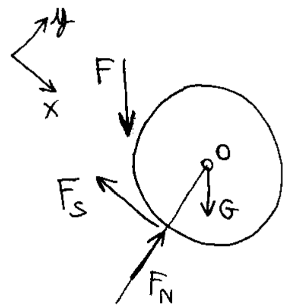
$R = 0{,}1\,m$

$G = 100\,N$

$\alpha = 40^\circ$

$F = ?$ hogy helyben maradjon

$\mu = ?$



1.) $\sum F_x = 0 = -F_S + F\sin\alpha + G\sin\alpha$

2.) $\sum F_y = 0 = F_N - F\cos\alpha - G\cos\alpha$

3.) $\sum M_0 = 0 = F\cdot R - F_S \cdot R$

3.) $F_S = F$

$3 \rightarrow 1.)$ $0 = -F + F\sin\alpha + G\sin\alpha$

$$\boxed{F = \frac{G\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{100\sin 40^\circ}{1-\sin 40^\circ} = 179{,}9\,N}$$

3.) $F_S = F = 179{,}9\,N$

2.) $F_N = (F+G)\cos\alpha = (179{,}9+100)\cos 40^\circ = 214{,}4\,N$

$$F_S = \mu F_N \longrightarrow \boxed{\mu = \frac{F_S}{F_N} = \frac{179{,}9}{214{,}4} = 0{,}8391}$$

Megjegyzés:
Ha a súrlódási együttható értéke a kiszámítottnál a kisebb, akkor hiába elegendő nagy az F erő értéke, a korong nem marad nyugalomban, mert megcsúszik a lejtőn.