Elméleti összefoglaló

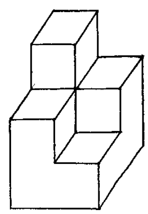
A súlypont-koordináták számítása általános térbeli esetben

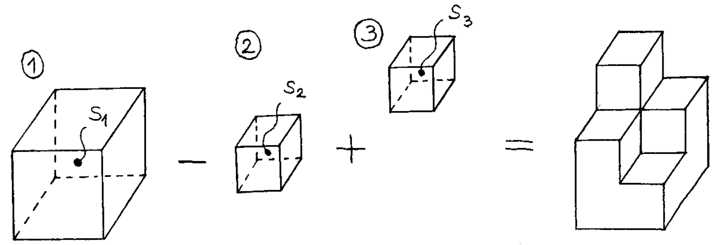
Egy térbeli test súlypontjának koordinátáit úgy számíthatjuk ki, hogy olyan szabályos részegységekre bontjuk, amelyeknek ismerjük a súlyponthelyzetét és a tömegét. A teljes összeállítás súlypontjának koordinátáit ezután a következő súlyozott átlagok kiszámításával határozhatjuk meg:

$$x_S = \frac{\sum \pm x_i\, m_i}{\sum \pm m_i}$$

$$y_S = \frac{\sum \pm y_i\, m_i}{\sum \pm m_i}$$

$$z_S = \frac{\sum \pm z_i\, m_i}{\sum \pm m_i}$$





A számlálóban x_i, y_i és z_i az i. részegység S_i súlypontjának koordinátáit jelenti, m_i pedig az i. részegység tömegét. A $\pm$ előjel a számlálóban és a nevezőben arra utal, hogy ha az adott részegység anyaga hiányzik a szerkezetből, akkor az ő jellemzőit le kell vonni. Ilyen például az ábrán kivágott kis kocka (2. részegység). Az x_i, y_i és z_i koordináták természetesen maguk is előjelesek a koordinátairányoknak megfelelően. Így a számlálóban egy (a tömegekkel) súlyozott összeg képződik, amit a test elsőrendű, vagy statikai nyomatékának nevezünk. A nevezőben pedig az össztömeg adódik ki.

Térbeli testek esetén a tömegek az $m_i = \rho_i V_i$ összefüggésből számíthatók, ahol ρ_i a részegység sűrűségét, V_i pedig a részegység térfogatát jelenti. Ha minden rész sűrűsége egyenlő, vagyis pl. azonos anyagból vannak, akkor a képletekben elegendő csak a térfogatokkal súlyozni (ρ-val egyszerűsíteni lehet):

$$\rho_i = \rho = \text{const.} \rightarrow x_S = \frac{\sum \pm x_i\, V_i}{\sum \pm V_i} \;;\; y_S = \frac{\sum \pm y_i\, V_i}{\sum \pm V_i} \;;\; z_S = \frac{\sum \pm z_i\, V_i}{\sum \pm V_i}$$

Mivel ezen $(x_S ; y_S ; z_S)$ pont koordinátái nem függnek az anyagjellemző sűrűségtől, csak a test geometriájától, ezért geometriai középpontnak is nevezik.

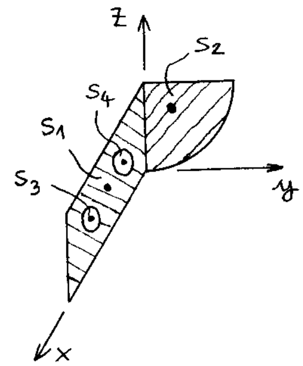
Lemezekből álló alkatrészek súlypont koordinátáinak számítása

Az előbbi alapképletek és meggondolások ilyen szerkezet esetén is használhatók:

$$x_S = \frac{\sum \pm x_i\, m_i}{\sum \pm m_i}$$

$$y_S = \frac{\sum \pm y_i\, m_i}{\sum \pm m_i}$$

$$z_S = \frac{\sum \pm z_i\, m_i}{\sum \pm m_i}$$



A részegységek tömege most $m_i = \rho_i v_i A_i$ alakba írható, ahol v_i az i. lemez vastagsága, A_i pedig az i. lemez területe. Ha a sűrűségek, a lemezvastagságok, vagy mindkettő állandó, akkor elhagyhatók a képletekből:

$$\rho_i = \rho = \text{const.} \;\rightarrow\; x_S = \frac{\sum \pm x_i\, v_i\, A_i}{\sum \pm v_i\, A_i} \;;\; y_S = \frac{\sum \pm y_i\, v_i\, A_i}{\sum \pm v_i\, A_i} \;;\; z_S = \frac{\sum \pm z_i\, v_i\, A_i}{\sum \pm v_i\, A_i}$$

$$v_i = v = \text{const.} \;\rightarrow\; x_S = \frac{\sum \pm x_i\, \rho_i\, A_i}{\sum \pm \rho_i\, A_i} \;;\; y_S = \frac{\sum \pm y_i\, \rho_i\, A_i}{\sum \pm \rho_i\, A_i} \;;\; z_S = \frac{\sum \pm z_i\, \rho_i\, A_i}{\sum \pm \rho_i\, A_i}$$

$$\rho_i = \rho = \text{const. és } v_i = v = \text{const.} \;\rightarrow\; x_S = \frac{\sum \pm x_i\, A_i}{\sum \pm A_i} \;;\; y_S = \frac{\sum \pm y_i\, A_i}{\sum \pm A_i} \;;\; z_S = \frac{\sum \pm z_i\, A_i}{\sum \pm A_i}$$

Síkidomok súlypontjának (geometriai középpontjának) meghatározása

Síkidomok esetén a z koordináta számítása elmarad, és általában a vastagság és a sűrűség figyelembevételére sincs szükség:

$$x_S = \frac{\sum \pm x_i\, A_i}{\sum \pm A_i}$$

$$y_S = \frac{\sum \pm y_i\, A_i}{\sum \pm A_i}$$

A súlyozó tényező ekkor a részegységek A_i területe. A számlálóban kialakuló súlyozott összeget ekkor is a síkidom elsőrendű, vagy statikai nyomatékának nevezzük, a nevezőben pedig az összterület adódik ki. Mivel anyagjellemzőket nem veszünk figyelembe, és az eredmény csak a síkidom geometriai adataitól függ, az $(x_S ; y_S)$ pontot a síkidom geometriai középpontjának is nevezik.

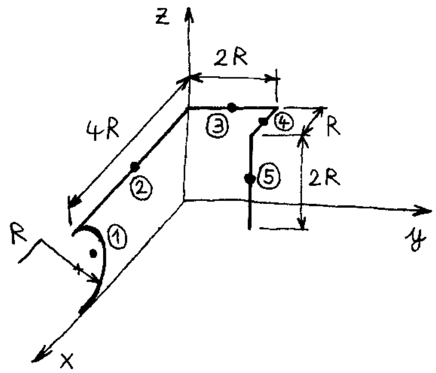
Rudakból álló szerkezetek súlypontjának és geometriai középpontjának meghatározása

Rudakból álló szerkezetek esetén is az alapképletekből indulhatunk ki, de most nincs $\pm$, mert rudat elég nehéz lenne kivonni:

$$x_S = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$$

$$y_S = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}$$

$$z_S = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i}$$



Ekkor a résztömegek $m_i = \rho_i A_i \ell_i$ alakba írhatók, ahol A_i az i. rúd keresztmetszeti területe, ℓ_i pedig az i. rúd hossza. Ha a rudak sűrűsége és keresztmetszeti területe azonos ($\rho_i = \rho = \text{const.}$ és $A_i = A = \text{const.}$), akkor csak a rúdhossz a súlyozó tényező.

$$x_S = \frac{\sum x_i \ell_i}{\sum \ell_i}$$

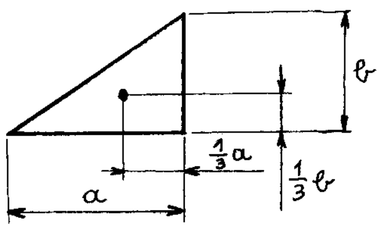
$$y_S = \frac{\sum y_i \ell_i}{\sum \ell_i}$$

$$z_S = \frac{\sum z_i \ell_i}{\sum \ell_i}$$

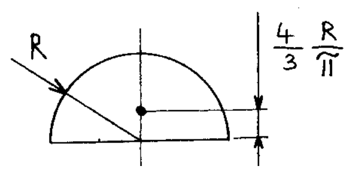
Ebben az esetben is helyesebb geometriai középpontról beszélni, mert az anyagjellemzőket és a rúd keresztmetszeti tulajdonságait nem vettük figyelembe, csak a szerkezet geometriáját. Ha a rúdszerkezet síkbeli, akkor itt sem kell törődni a z koordinátával.

Néhány jellegzetes alakú síkidom és íves rúd súlyponthelyzete

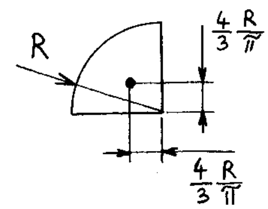
Síkidomok: háromszög, félkör, negyed-kör



$A = \frac{1}{2} a\, b$

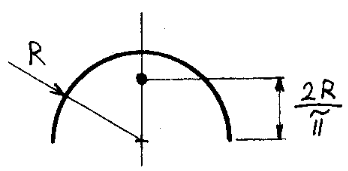


$A = \frac{R^2 \pi}{2}$

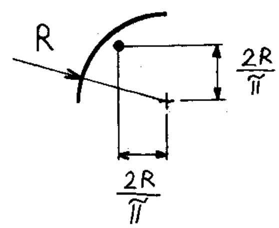


$A = \frac{R^2 \pi}{4}$

Íves rudak: 180° és 90°-os ív

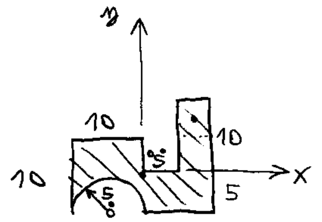


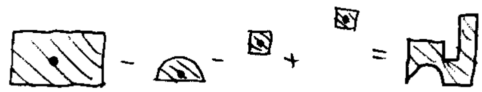
$\ell = R\,\pi$



$\ell = \frac{R\,\pi}{2}$

1. példa: Adjuk meg a síkidom súlypontjának helyét! A kiinduló xy koordinátarendszert tetszőlegesen felvehetjük.

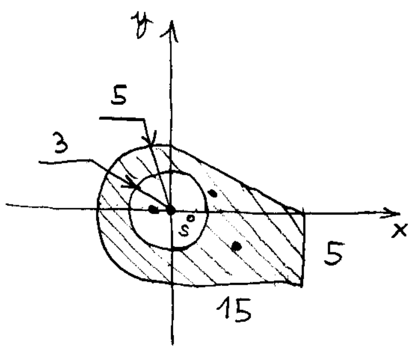


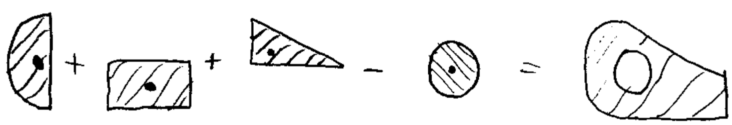


$$x_s = \frac{+0 - (-5)\cdot\frac{5^2\pi}{2} - (2{,}5)\cdot 5\cdot 5 + (7{,}5)\cdot 5\cdot 5}{+20\cdot 10 - \frac{5^2\pi}{2} - 5\cdot 5 + 5\cdot 5} = \frac{321{,}3}{160{,}7} = 2 \text{ mm}$$

$$y_s = \frac{+0 - \left(-5 + \frac{4}{3}\frac{5}{\pi}\right)\frac{5^2\pi}{2} - (2{,}5)\cdot 5\cdot 5 + (7{,}5)\cdot 5\cdot 5}{160{,}7} = \frac{238{,}0}{160{,}7} = 1{,}481 \text{ mm}$$

2. példa: Adjuk meg a síkidom súlypontjának helyét! A kiinduló xy koordinátarendszert tetszőlegesen felvehetjük.

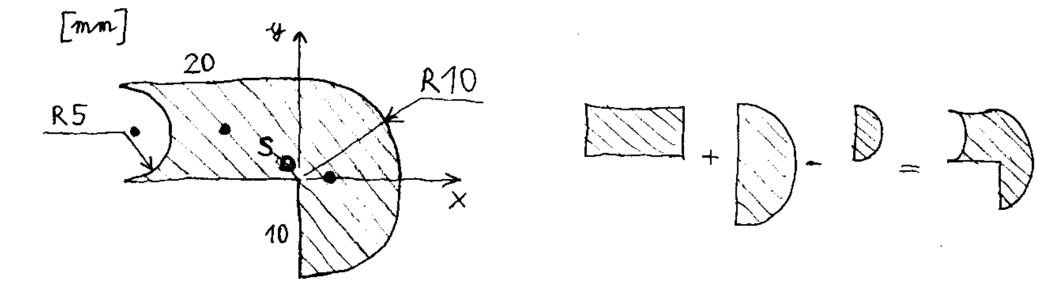




$$x_s = \frac{+\left(-\frac{4}{3}\frac{5}{\pi}\right)\frac{5^2\pi}{2} + (7{,}5)\cdot 15\cdot 5 + \left(\frac{1}{3}15\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 5 - 0}{+\frac{5^2\pi}{2} + 15\cdot 5 + \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 5 - 3^2\pi} = \frac{666{,}7}{123{,}5} = 5{,}398 \text{ mm}$$

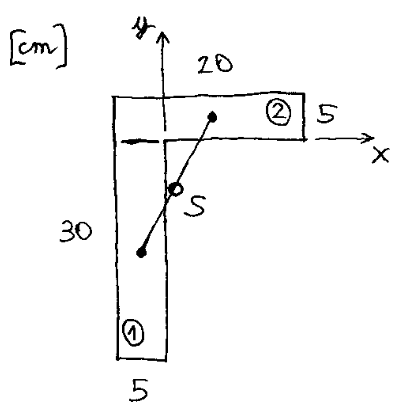
$$y_s = \frac{0 + (-2{,}5)\cdot 15\cdot 5 + \left(\frac{1}{3}\cdot 5\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 5 - 0}{123{,}5} = \frac{-125}{123{,}5} = -1{,}012 \text{ mm}$$

3. példa: Adjuk meg a síkidom súlypontjának helyét! A kiinduló xy koordinátarendszert tetszőlegesen felvehetjük.



$$x_s = \frac{+(-10)\cdot 20\cdot 10 + \left(+\frac{4}{3}\,\frac{10}{\pi}\right)\cdot\frac{10^2\pi}{2} - \left(-20+\frac{4}{3}\,\frac{5}{\pi}\right)\cdot\frac{5^2\pi}{2}}{+20\cdot 10 + \frac{10^2\pi}{2} - \frac{5^2\pi}{2}} = \frac{-631{,}3}{317{,}8} = -1{,}986\ \text{mm}$$

$$y_s = \frac{+(+5)\cdot 20\cdot 10 + (0) - (+5)\cdot\frac{5^2\pi}{2}}{317{,}8} = \frac{+803{,}7}{317{,}8} = +2{,}529\ \text{mm}$$

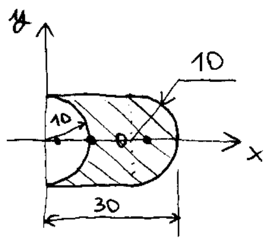


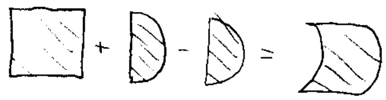
$$x_s = \frac{+(-2{,}5)\cdot 5\cdot 25 + (+5)\cdot 20\cdot 5}{+5\cdot 25 + 20\cdot 5} = \frac{+187{,}5}{225} = +0{,}8\overline{3}\ \text{cm}$$

$$y_s = \frac{+(-12{,}5)\cdot 5\cdot 25 + (+2{,}5)\cdot 20\cdot 5}{225} = \frac{-1312{,}5}{225} = -5{,}8\overline{3}\ \text{cm}$$

Megjegyzés:
Ha két darabból áll a síkidom, akkor a darabok súlypontjait összekötő egyenesen lesz az eredő súlypont. Pontos elhelyezkedése a darabok területeinek arányától függ.

4. példa: Adjuk meg a síkidom súlypontjának helyét! A kiinduló xy koordinátarendszert tetszőlegesen felvehetjük.



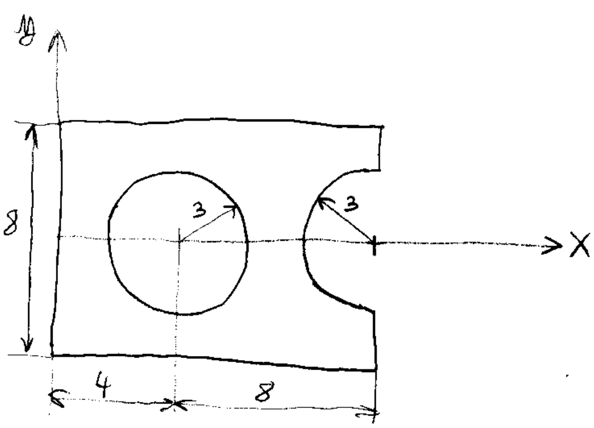


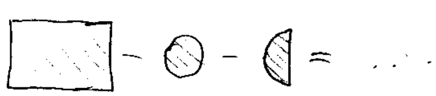
$$x_S = \frac{+(10)\cdot 20\cdot 20 + \left(20+\frac{4}{3}\frac{10}{\pi}\right)\cdot\frac{10^2\pi}{2} - \left(\frac{4}{3}\frac{10}{\pi}\right)\frac{10^2\pi}{2}}{+20\cdot 20 + \frac{10^2\pi}{2} - \frac{10^2\pi}{2}} = \frac{7142}{400} = 17{,}86\ mm$$

$$y_S = 0$$

Megjegyzés:
A x tengelyt a szimmetriatengelyre tettük, így y_S-t nem is kellett számolnunk.

5. példa: Adjuk meg a síkidom súlypontjának helyét! A kiinduló xy koordinátarendszert tetszőlegesen felvehetjük.



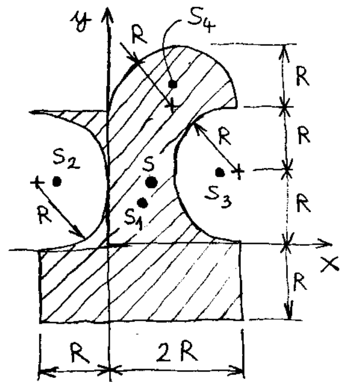


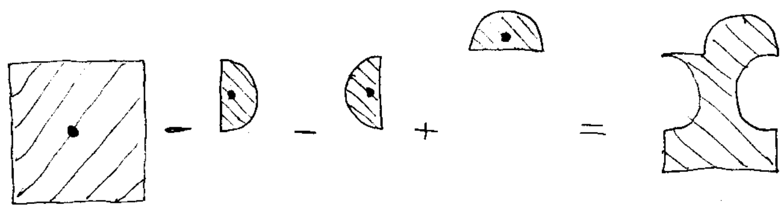
$$x_S = \frac{6\cdot 12\cdot 8 - 4\cdot 3^2\pi - \left(12-\frac{4}{3}\frac{3}{\pi}\right)\cdot\frac{3^2\pi}{2}}{12\cdot 8 - 3^2\pi - \frac{3^2\pi}{2}} = 5{,}81\ mm$$

$$y_S = 0$$

Megjegyzés:
A x tengelyt a szimmetriatengelyre tettük, így y_S-t nem is kellett számolnunk.

6. példa: Adjuk meg a síkidom súlypontjának helyét! A kiinduló xy koordinátarendszert tetszőlegesen felvehetjük.





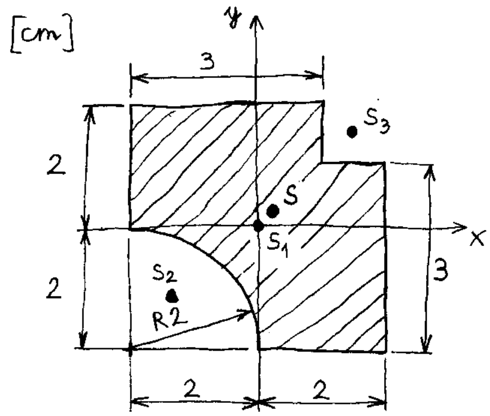
$$\boxed{x_s} = \frac{\sum \pm x_i A_i}{\sum \pm A_i} = \frac{+(0,5R)\cdot 3R\cdot 3R - \left(-R+\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}\right)\cdot\frac{R^2\pi}{2} - \left(+2R-\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}\right)\cdot\frac{R^2\pi}{2} + (+R)\cdot\frac{R^2\pi}{2}}{+3R\cdot 3R - \frac{R^2\pi}{2} - \frac{R^2\pi}{2} + \frac{R^2\pi}{2}} =$$

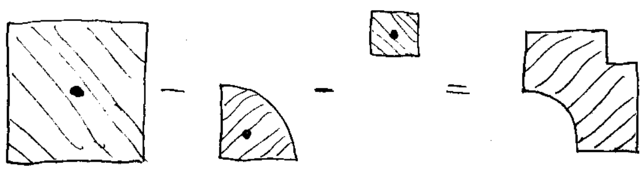
$$= \frac{+4,5\,R^3}{7,429\,R^2} = \boxed{+0,6057\,R}$$

$$\boxed{y_s} = \frac{\sum \pm y_i A_i}{\sum \pm A_i} = \frac{+(+0,5R)\cdot 3R\cdot 3R - (+R)\frac{R^2\pi}{2} - (+R)\frac{R^2\pi}{2} + \left(2R+\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}\right)\cdot\frac{R^2\pi}{2}}{7,429\,R^2} =$$

$$= \frac{+5,167\,R^3}{7,429\,R^2} = \boxed{+0,6955\,R}$$

7. példa: Adjuk meg a síkidom súlypontjának helyét! A kiinduló xy koordinátarendszert tetszőlegesen felvehetjük.





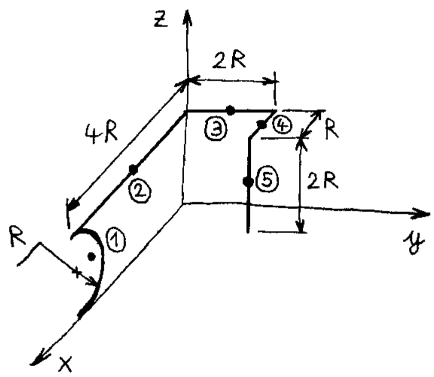
$$\boxed{x_S} = \frac{\sum \pm x_i A_i}{\sum \pm A_i} = \frac{+0 - \left(-2 + \frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)\cdot\frac{2^2\pi}{4} - (+1{,}5)\cdot 1\cdot 1}{+4\cdot 4 - \frac{2^2\pi}{4} - 1\cdot 1} =$$

$$= \frac{+2{,}117}{11{,}86} = \boxed{+0{,}1785\ cm}$$

$$\boxed{y_S = x_S = +0{,}1785\ cm} \leftarrow \text{szimmetria}$$

Megjegyzés:
A kiinduló xy koordinátarendszert igyekeztünk a súlypont várható helyéhez közel felvenni. A, 45°-os, jobbra-felfelé mutató szimmetriatengely miatt a két súlypont-koordináta értékének meg kell egyeznie.

8. példa: Számítsuk ki a súlypont-koordinátákat a megadott koordinátarendszerben!



$$\boxed{x_s} = \frac{\sum x_i \ell_i}{\sum \ell_i} = \frac{\left(+4R - \frac{2R}{\pi}\right)\cdot R\pi + (+2R)\cdot 4R + 0 + \left(+\frac{1}{2}R\right)\cdot R + (+R)\cdot 2R}{R\pi + 4R + 2R + R + 2R} =$$

$$= \frac{21{,}07\,R^2}{12{,}14\,R} = \boxed{1{,}736\,R}$$

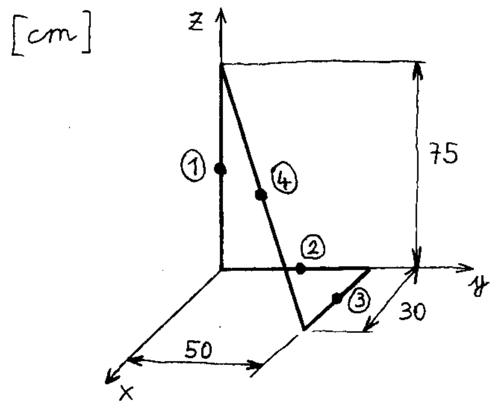
$$\boxed{y_s} = \frac{\sum y_i \ell_i}{\sum \ell_i} = \frac{0 + 0 + (+R)\cdot 2R + (+2R)\cdot R + (+2R)\cdot 2R}{12{,}14\,R} =$$

$$= \frac{8\,R^2}{12{,}14\,R} = \boxed{0{,}6590\,R}$$

$$\boxed{z_s} = \frac{\sum z_i \ell_i}{\sum \ell_i} = \frac{(+R)\cdot R\pi + (+2R)\cdot 4R + (+2R)\cdot 2R + (+2R)\cdot R + (+R)\cdot 2R}{12{,}14\,R} =$$

$$= \frac{19{,}14\,R^2}{12{,}14\,R} = \boxed{1{,}577\,R}$$

9. példa: Számítsuk ki a súlypont-koordinátákat a megadott koordinátarendszerben!



$$\ell_4 = \sqrt{30^2 + 50^2 + 75^2} = 95\ cm$$

$$\boxed{x_s} = \frac{\sum x_i \ell_i}{\sum \ell_i} = \frac{(0) + (0) + (+15)\cdot 30 + (+15)\cdot 95}{75 + 50 + 30 + 95} = \frac{+1875}{250} = \boxed{+7{,}5\ cm}$$

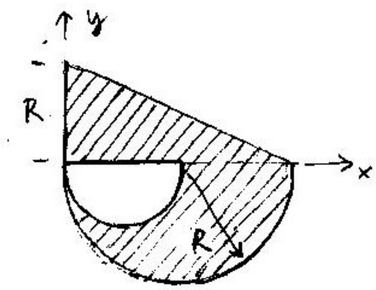
$$\boxed{y_s} = \frac{\sum y_i \ell_i}{\sum \ell_i} = \frac{(0) + (+25)\cdot 50 + (+50)\cdot 30 + (+25)\cdot 95}{250} = \frac{+5125}{250} = \boxed{+20{,}5\ cm}$$

$$\boxed{z_s} = \frac{\sum z_i \ell_i}{\sum \ell_i} = \frac{(+37{,}5)\cdot 75 + (0) + (0) + (+37{,}5)\cdot 95}{250} = \frac{+6375}{250} = \boxed{+25{,}5\ cm}$$

Korábbi, paraméteres feladatok:

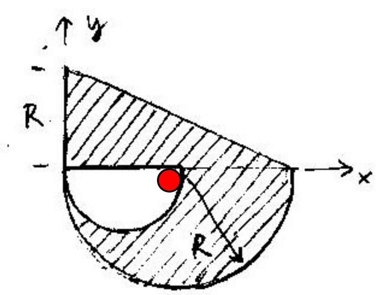
Sz-1:

Számítsuk ki a síkidom súlypontjának koordinátáit a megadott koordinátarendszerben!



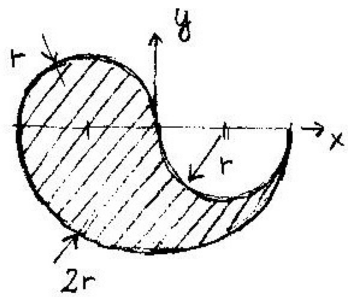
$$x_S = \frac{\left(+\frac{1}{3}\cdot 2R\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot R+(+R)\frac{R^2\pi}{2}-\left(+\frac{R}{2}\right)\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2\pi}{2}}{\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot R+\frac{R^2\pi}{2}-\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2\pi}{2}} = \frac{+2{,}041R^3}{2{,}178R^2} = +0{,}9371R$$

$$y_S = \frac{\left(+\frac{1}{3}R\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot R+\left(-\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}\right)\frac{R^2\pi}{2}-\left(-\frac{4}{3}\frac{\left(\frac{R}{2}\right)}{\pi}\right)\frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2\pi}{2}}{2{,}178R^2} = \frac{+0{,}2500R^3}{2{,}178R^2} = -0{,}1148R$$



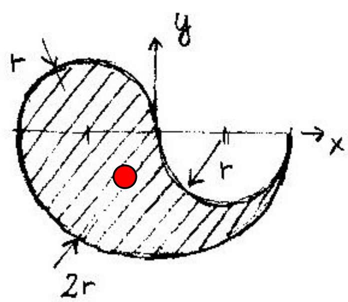
Sz-2:

Számítsuk ki a síkidom súlypontjának koordinátáit a megadott koordinátarendszerben!



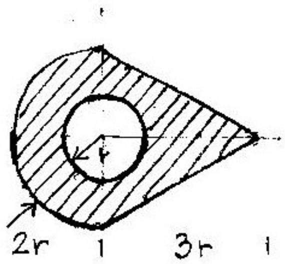
$$x_S = \frac{(-r)\frac{r^2\pi}{2} + (0) - (+r)\frac{r^2\pi}{2}}{\frac{r^2\pi}{2} + \frac{(2r)^2\pi}{2} - \frac{r^2\pi}{2}} = \frac{-r^3\pi}{2r^2\pi} = -0{,}5r$$

$$y_S = \frac{\left(+\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)\frac{r^2\pi}{2} + \left(-\frac{4}{3}\frac{2r}{\pi}\right)\frac{(2r)^2\pi}{2} - \left(-\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)\frac{r^2\pi}{2}}{2r^2\pi} = \frac{-4{,}000r^3}{6{,}283r^2} = -0{,}6366R$$

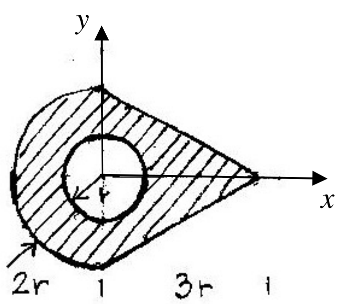


Sz-3:

Adjuk meg a síkidom súlypontjának helyét! A kiinduló xy koordinátarendszert tetszőlegesen felvehetjük.

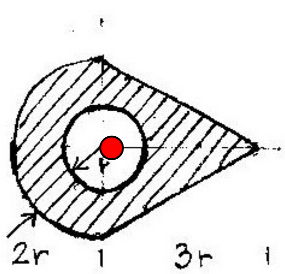


Mivel nem jelölték ki a koordinátatengelyeket, célszerűen a vízszintes szimmetriatengelyt válaszjuk x tengelynek, az y tengelyt pedig a kör középpontjához igazítjuk:



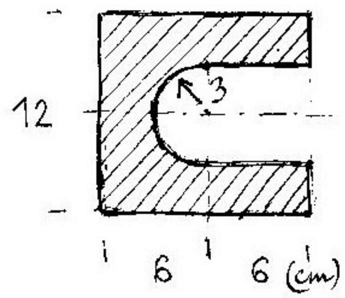
$$x_S = \frac{\left(-\frac{4}{3}\frac{2r}{\pi}\right)\frac{(2r)^2\pi}{2} + \left(+\frac{1}{3}3\cdot r\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 3r\cdot 4r - (0)}{\frac{(2r)^2\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot 3r\cdot 4r - r^2\pi} = \frac{+0{,}6667r^3}{9{,}142r^2} = +0{,}07292r$$

$y_S = 0$ (szimmetria)

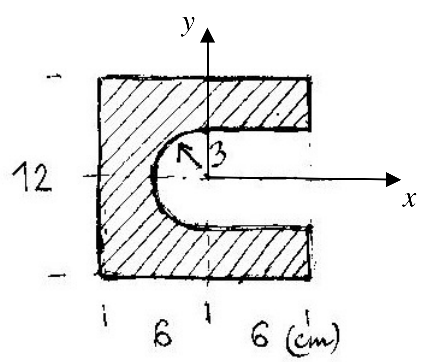


Sz-4:

Adjuk meg a síkidom súlypontjának helyét! A kiinduló xy koordinátarendszert tetszőlegesen felvehetjük.

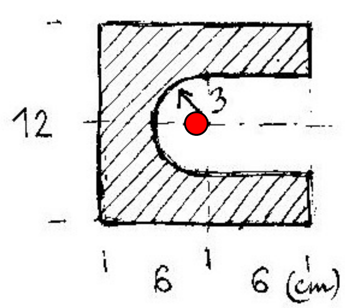


Mivel nem jelölték ki a koordinátatengelyeket, célszerűen a vízszintes szimmetriatengelyt válaszjuk x tengelynek, az y tengelyt pedig a kivágott félkör átmérőjéhez és egyben a kivágott négyzet oldalához igazítjuk:

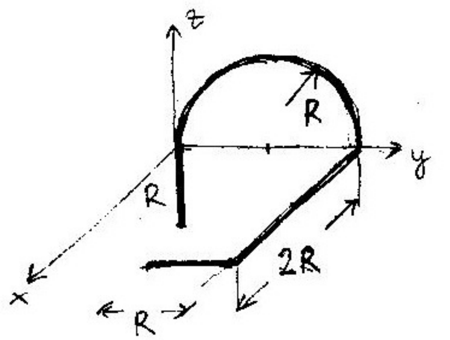


$$x_S = \frac{(0)-(+3)\cdot 6\cdot 6-\left(-\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{\pi}\right)\frac{3^2\pi}{2}}{12\cdot 12-6\cdot 6-\frac{3^2\pi}{2}} = \frac{-90{,}00}{93{,}86} = -0{,}9589 \text{ cm}$$

$y_S = 0$ (szimmetria)



Sz-5: Számítsuk ki a súlypont-koordinátákat a megadott koordinátarendszerben!

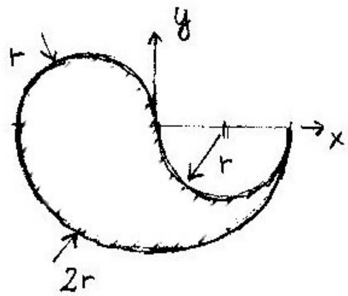


$$x_S = \frac{(0)+(0)+(+R)\cdot 2R+(+2R)\cdot R}{R+R\pi+2R+R} = \frac{+4R^2}{7{,}142R} = +0{,}5601R$$

$$y_S = \frac{(0)+(+R)\cdot R\pi+(+2R)\cdot 2R+(+1{,}5R)\cdot R}{7{,}142R} = \frac{+8{,}642R^2}{7{,}142R} = +1{,}210R$$

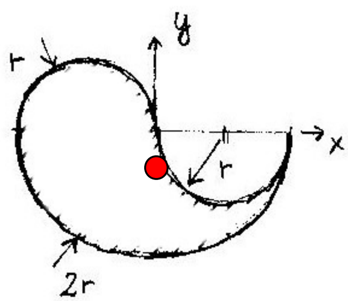
$$z_S = \frac{\left(-\frac{1}{2}R\right)\cdot R+\left(+\frac{2R}{\pi}\right)\cdot R\pi+(0)+(0)}{7{,}142R} = \frac{+1{,}5R^2}{7{,}142R} = +0{,}2100R$$

Sz-6: Számítsuk ki a síkbeli drótváz súlypont-koordinátáit a megadott koordinátarendszerben!



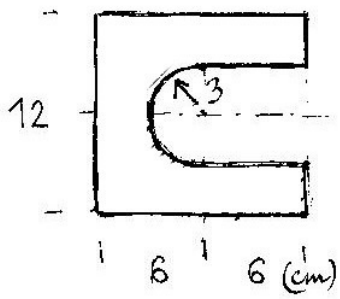
$$x_S = \frac{(-r)\cdot r\pi + (+r)\cdot r\pi + (0)}{r\pi + r\pi + 2r\pi} = \frac{0}{4r\pi} = 0$$

$$y_S = \frac{\left(+\frac{2r}{\pi}\right)\cdot r\pi + \left(-\frac{2r}{\pi}\right)\cdot r\pi + \left(-\frac{2(2r)}{\pi}\right)\cdot (2r)\pi}{4r\pi} = \frac{-8r^2}{12{,}57r} = -0{,}6364r$$

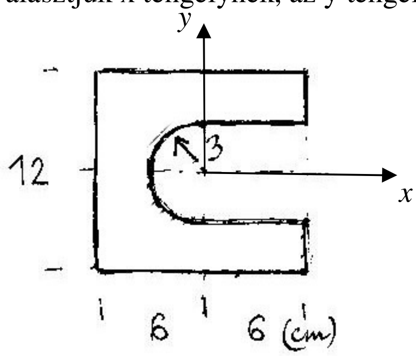


Megjegyzés:
Mindkét koordináta számításánál a számláló első két tagja kiejti egymást. Ez azért van, mert a két azonos méretű félkör súlypontkoordinátái tükörszimmetrikusan helyezkednek el az x és az y tengelyre is. Mivel az y tengelyre a nagyobbik félkör is szimmetrikus, így a súlypont x koordinátája nullára adódik. Az előbbi gondolatmenet alapján erre számolás nélkül is rájöhettünk volna, de így utólag tanulságosabb az eset...

Sz-7: Számítsuk ki a síkbeli drótváz súlypont-koordinátáit a megadott koordinátarendszerben!

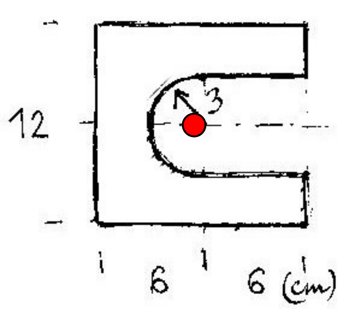


Mivel nem jelölték ki a koordinátatengelyeket, célszerűen a vízszintes szimmetriatengelyt választjuk x tengelynek, az y tengelyt pedig a félkör átmérőjéhez igazítjuk:



$$x_S = \frac{(-6)\cdot 12 + 2\cdot(0) + 2\cdot(+6)\cdot 3 + 2\cdot(+3)\cdot 6 + \left(-\frac{2\cdot 3}{\pi}\right)\cdot 3\pi}{12 + 2\cdot 12 + 2\cdot 3 + 2\cdot 6 + 3\pi} = \frac{-18}{63{,}42} = -0{,}2838 \text{ cm}$$

$y_S = 0$ (szimmetria)



Megjegyzés:
A 2-es szorzók arra utalnak, hogy az alsó és felső vízszintes szakaszokat, valamint a bal oldali függőleges szakaszokat páronként vettük számításba, mivel a párok x irányú súlypontkoordinátái azonosak.