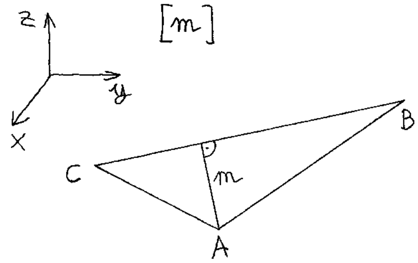
Ezt a példát a keddi gyakorlaton nem sikerült befejezni:

A csúcspontok koordinátáival adott az ABC háromszög. Milyen messze van az A csúcs a BC oldaltól?



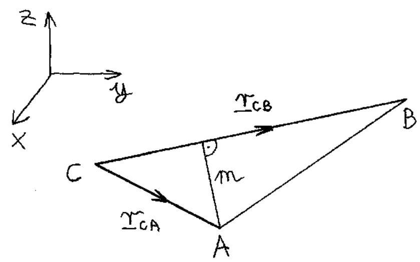
$A(5, 2, 0)$

$B(1, 8, 6)$

$C(3, -4, 4)$

$m = ?$

1. megoldás: A háromszög területét az „1/2-szer alap szorozva magasság” képlet segítségével és az „1/2-szer a szomszédos oldalak vektori szorzatának abszolútértéke” alapján is felírjuk. A két kifejezést egyenlővé téve a háromszög magassága – ami pont a keresett távolság – kifejezhető.



$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\underline{r}_{CB}| \cdot m \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2} \text{alap} \cdot \text{magasság}$$

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\underline{r}_{CA} \times \underline{r}_{CB}| \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2} \cdot \text{vektori szorzat abszolútérték}$$

$$\frac{1}{2} |\underline{r}_{CB}| m = \frac{1}{2} |\underline{r}_{CA} \times \underline{r}_{CB}|$$

$$m = \frac{|\underline{r}_{CA} \times \underline{r}_{CB}|}{|\underline{r}_{CB}|}$$

$$\underline{r}_{CA} = \underline{r}_A - \underline{r}_C = (5\underline{i} + 2\underline{j}) - (3\underline{i} - 4\underline{j} + 4\underline{k}) = 2\underline{i} + 6\underline{j} - 4\underline{k} \; [m]$$

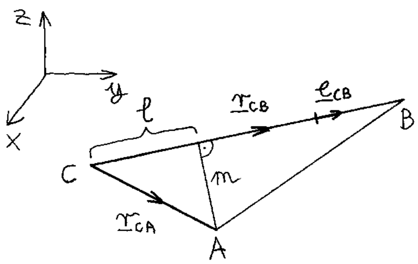
$$\underline{r}_{CB} = \underline{r}_B - \underline{r}_C = (\underline{i} + 8\underline{j} + 6\underline{k}) - (3\underline{i} - 4\underline{j} + 4\underline{k}) = -2\underline{i} + 12\underline{j} + 2\underline{k} \; [m]$$

$$\underline{r}_{CA} \times \underline{r}_{CB} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 6 & -4 \\ -2 & 12 & 2 \end{vmatrix} = \underline{i}(12 + 48) - \underline{j}(4 - 8) + \underline{k}(24 + 12) = $$

$$= 60\underline{i} + 4\underline{j} + 36\underline{k}$$

$$\boxed{m = \frac{\sqrt{60^2 + 4^2 + 36^2}}{\sqrt{2^2 + 12^2 + 2^2}} = 5{,}685 \; m}$$

2. megoldás: Először kiszámítjuk az $\underline{r}_{CA}$ vektornak a CB oldalra vetített merőleges vetületét. Ennek ismeretében az m magasságot a kis derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tételből kapjuk.



$$\ell = \underline{r}_{CA} \cdot \underline{e}_{CB} = \underline{r}_{CA} \cdot \frac{\underline{r}_{CB}}{|\underline{r}_{CB}|} = \frac{\underline{r}_{CA} \cdot \underline{r}_{CB}}{|\underline{r}_{CB}|} = \frac{(2\underline{i}+6\underline{j}-4\underline{k})\cdot(-2\underline{i}+12\underline{j}+2\underline{k})}{\sqrt{2^2+12^2+2^2}} =$$

$$= \frac{-4+72-8}{\sqrt{152}} = 4{,}867\ m$$

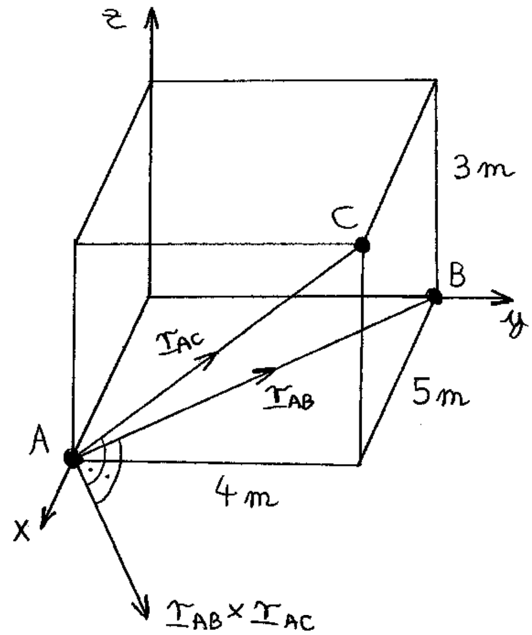
$$\ell^2 + m^2 = |\underline{r}_{CA}|^2 \quad \leftarrow \text{Pitagorasz}$$

$$\boxed{m = \sqrt{\underline{r}_{CA}^2 - \ell^2} = \sqrt{(2^2+6^2+4^2) - 4{,}867^2} = 5{,}684\ m}$$

A két különböző módon kapott eredmény kismértékű eltérése a számítások során alkalmazott kerekítések következménye.

Ezt a példát a csütörtöki gyakorlaton nem oldottuk meg:

Számítsuk ki az AB és az AC pontokat összekötő vektorok vektoriális szorzatát!



$$\underline{r}_{AB} \times \underline{r}_{AC} = ?$$

$$\underline{r}_{AB} = -5\,\underline{i} + 4\,\underline{j} \;[m]$$

$$\underline{r}_{AC} = 4\,\underline{j} + 3\,\underline{k} \;[m]$$

$$\boxed{\underline{r}_{AB} \times \underline{r}_{AC}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \underline{i}(12-0) - \underline{j}(-15-0) + \underline{k}(-20-0) =$$

$$\boxed{= 12\,\underline{i} + 15\,\underline{j} - 20\,\underline{k}}$$

- Hihető, hogy a berajzolt eredményvektort kaptuk?
- Figyeljük meg, hogy az $\underline{r}_{AB}$, az $\underline{r}_{AC}$ és az $\underline{r}_{AB} \times \underline{r}_{AC}$ vektorok ebben a sorrendben jobbrendszert alkotnak!
- Merre mutatna az $\underline{r}_{AC} \times \underline{r}_{AB}$ vektor?