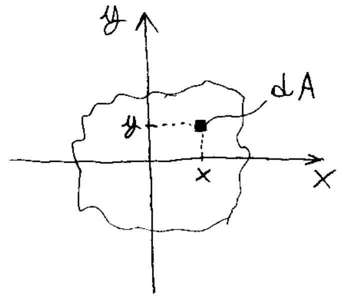
Egy kis elmélet



$$I_x = \int_{(A)} y^2 \, dA$$

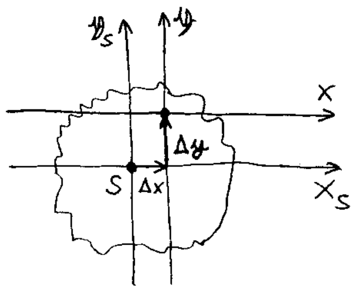
$$I_y = \int_{(A)} x^2 \, dA$$

$$I_{xy} = \int_{(A)} xy \, dA$$

$$I_p = I_x + I_y$$

$$\underline{\underline{I}}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix}$$

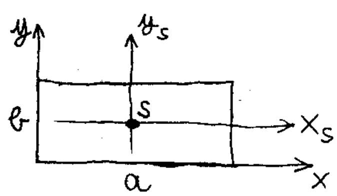
STEINER tétel:



$$I_x = I_{x_s} + \Delta y^2 \cdot A$$

$$I_y = I_{y_s} + \Delta x^2 \cdot A$$

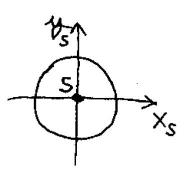
$$I_{xy} = I_{x_s y_s} + \Delta x \cdot \Delta y \cdot A$$



$$I_x = \frac{a b^3}{3} \qquad I_{x_s} = \frac{a b^3}{12}$$

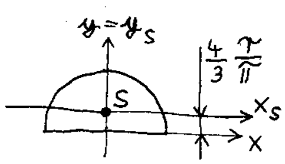
$$I_y = \frac{a^3 b}{3} \qquad I_{y_s} = \frac{a^3 b}{12}$$

$$I_{xy} = \frac{a^2 b^2}{4} \qquad I_{x_s y_s} = 0$$



$$I_{x_s} = I_{y_s} = \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{r^4 \pi}{4}$$

$$I_{x_s y_s} = 0$$

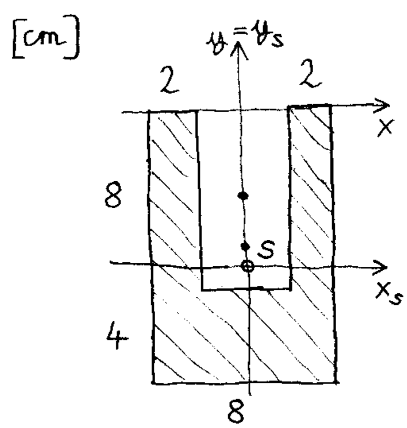


$$I_x = I_y = I_{y_s} = \frac{d^4 \pi}{128} = \frac{r^4 \pi}{8}$$

$$I_{x_s} = \frac{r^4 \pi}{8} - \left(\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)^2 \frac{r^2 \pi}{2}$$

1. példa:

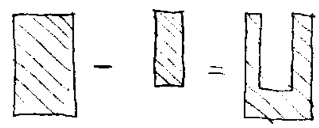
Számítsuk ki a súlyponti x és y tengelyekre számított másodrendű nyomatékokat!



$I_{x_s} = ?$

$I_{y_s} = ?$

$I_{x_s y_s} = ?$



$x_s = 0 \leftarrow$ szimmetria

$$y_s = \frac{+(-6)\cdot 8\cdot 12 - (-4)\cdot 4\cdot 8}{+8\cdot 12 - 4\cdot 8} = \frac{-448}{64} = -7\ \text{cm}$$

$$\boxed{I_{x_s} = \underbrace{\frac{12^3\cdot 8}{3} - \frac{8^3\cdot 4}{3}}_{I_x} \underbrace{- 7^2\cdot 64}_{ST_{x\to x_s}} = 789{,}3\ \text{cm}^4}$$

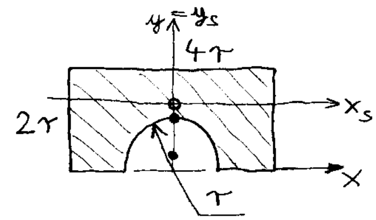
$$\boxed{I_{y_s} = I_y = \frac{8^3\cdot 12}{12} - \frac{4^3\cdot 8}{12} = 469{,}3\ \text{cm}^4}$$

$$\boxed{I_{x_s y_s} = 0} \leftarrow \text{szimmetria}$$

Megjegyzés:
A kezdeti koordinátarendszert tetszőlegesen felvehettük. Az y tengely helyét egyértelműen kijelölte a szimmetriatengely, az x tengelyt pedig azért vettük fel a síkidom tetejére, mert oda a befoglaló és a hiányzó téglalap másodrendű nyomatékát is könnyű kiszámítani (mindkettőnek oldallap tengelye). A számítás során először a teljes síkidom másodrendű nyomatékát kiszámítottuk a kezdeti x tengelyre, majd az így összeállított, teljes síkidomnak a nem súlyponti x tengelyéről tértünk át egy negatív Steiner-taggal a súlyponti xs tengelyére.

2. példa:

Írjuk fel a súlyponti másodrendű nyomatéki tenzort!



$$\underline{\underline{I}}_s = ?$$

$$x_s = 0 \leftarrow \text{szimmetria}$$

$$y_s = \frac{+(r)\cdot 4r\cdot 2r - \left(\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)\cdot\frac{r^2\pi}{2}}{4r\cdot 2r - \frac{r^2\pi}{2}} = \frac{+7{,}333\, r^3}{6{,}429\, r^2} = 1{,}141\, r$$

$$\boxed{I_{x_s} = \underbrace{\frac{(2r)^3\cdot 4r}{3} - \frac{r^4\pi}{8}}_{I_x} \underbrace{-(1{,}141 r)^2\cdot 6{,}429 r^2}_{ST_{x\to x_s}} = 1{,}904\, r^4}$$

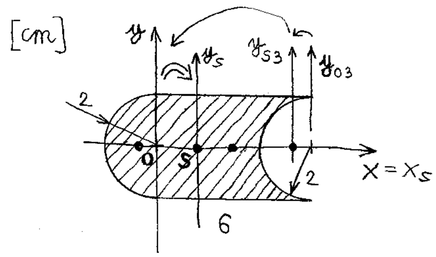
$$\boxed{I_{y_s} = I_y = \frac{(4r)^3\cdot 2r}{12} - \frac{r^4\pi}{8} = 10{,}27\, r^4}$$

$$\boxed{I_{x_s y_s} = 0} \leftarrow \text{szimmetria}$$

$$\underline{\underline{I}}_s = \begin{bmatrix} 1{,}904 & 0 \\ 0 & 10{,}27 \end{bmatrix} r^4$$

Megjegyzés:
A kezdeti koordinátarendszert tetszőlegesen felvehettük. Az y tengely helyét egyértelműen kijelölte a szimmetriatengely, az x tengelyt pedig azért vettük fel a síkidom aljára, mert oda a befoglaló téglalap és a hiányzó félkör másodrendű nyomatékát is könnyű kiszámítani. A számítás során először a teljes síkidom másodrendű nyomatékát kiszámítottuk a kezdeti x tengelyre, majd az így összeállított, teljes síkidomnak a nem súlyponti x tengelyéről tértünk át egy negatív Steiner-taggal a súlyponti xs tengelyére.

3. példa: Számítsuk ki az O ponton átmenő x-y tengelyekre vett ekvatoriális és centrifugális másodrendű nyomatékokat! Számítsuk ki a súlyponton átmenő x_S-y_S tengelyekre vett ekvatoriális és centrifugális másodrendű nyomatékokat is!



$$I_x = \frac{4^3\cdot 6}{12} = 32\ cm^4$$

$$I_y = \frac{2^4\pi}{8} + \frac{6^3\cdot 4}{3} - \underbrace{\Bigg[\underbrace{\underbrace{\frac{2^4\pi}{8}}_{I^{(3)}_{y_{O3}}} \underbrace{- \left(\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)^2\cdot\frac{2^2\pi}{2}}_{ST^{(3)}_{y_{O3}\to y_{S3}}}}_{I^{(3)}_{y_{S3}}} \underbrace{+ \left(6-\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)^2\cdot\frac{2^2\pi}{2}}_{ST^{(3)}_{y_{S3}\to y}}\Bigg]}_{I^{(3)}_{y}} = 125{,}8\ cm^4$$

$I_{xy} = 0 \leftarrow x$ szimmetriatengely

$$x_S = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{+\left(-\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)\frac{2^2\pi}{2} + (+3)\cdot 6\cdot 4 - \left(+6-\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)\cdot\frac{2^2\pi}{2}}{+\frac{2^2\pi}{2} + 6\cdot 4 - \frac{2^2\pi}{2}} = \frac{+34{,}30}{24} = +1{,}429\ cm$$

$y_S = 0 \leftarrow$ szimmetria

$$I_{x_S} = I_x = 32\ cm^4$$

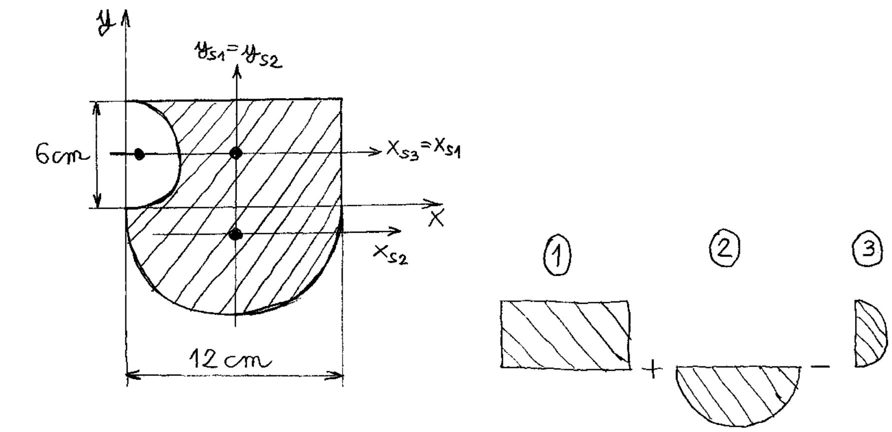
$$I_{y_S} = I_y - x_S^2\cdot A = 125{,}8 - 1{,}429^2\cdot 24 = 76{,}79\ cm^4$$

$I_{x_S y_S} = 0 \leftarrow x_S$ szimmetriatengely

Megjegyzés:
Az Ix azért számítható ilyen egyszerűen mert a téglalaphoz hozzáadódó és abból kivonódó félkörök másodrendű nyomatéka az x tengelyre egyenlő. Szemléletesen a bal oldali félkörrel a hiányzó rész lefedhető, mivel a tengely menti eltolás nem változtat a tengelyre vett másodrendű nyomaték értékén.
A hiányzó félkör függőleges átmérő tengelyére számolt másodrendű nyomaték nem vihető át közvetlenül az y tengelyre, mivel a Steiner-tétel csak súlyponti és nem súlyponti tengely között érvényes, két nem súlyponti között nem. Emiatt először át kell térni a hiányzó félkör saját súlyponti tengelyére egy negatív, majd innen az y tengelyre egy pozitív Steiner-taggal.
Ha az y tengelyre már kiszámoltuk a másodrendű nyomatékot, az y_S tengelyre a teljes keresztmetszetre felírt Steiner-tétellel, negatív Steiner-taggal térhetünk át.

4. példa:

Írja fel a vázolt síkidomnak a berajzolt xy koordinátarendszerhez tartozó másodrendű nyomatéki tenzorát!



$$I_x=\underbrace{\left[\frac{6^3\cdot 12}{3}\right]}_{I_x^{(1)}}+\underbrace{\left[\frac{12^4\pi}{128}\right]}_{I_x^{(2)}}-\underbrace{\left[\underbrace{\frac{6^4\pi}{128}}_{I_{x_{S3}}^{(3)}}+\underbrace{3^2\cdot\frac{6^2\pi}{8}}_{ST^{(3)}_{x_{S3}\to x}}\right]}_{I_x^{(3)}}=1214\ cm^4$$

$$I_y=\underbrace{\left[\frac{12^3\cdot 6}{3}\right]}_{I_y^{(1)}}+\left[\underbrace{\frac{12^4\pi}{128}}_{I_{y_{S2}}^{(2)}}+\underbrace{6^2\cdot\frac{12^2\pi}{8}}_{ST^{(2)}_{y_{S2}\to y}}\right]-\underbrace{\left[\frac{6^4\pi}{128}\right]}_{I_y^{(3)}}=5969\ cm^4$$

$$I_{xy}=\left[\underbrace{0}_{I^{(1)}_{x_{S1}y_{S1}}}+\underbrace{(-6)\cdot(-3)\cdot 12\cdot 6}_{ST^{(1)}_{x_{S1}y_{S1}\to xy}}\right]+\left[\underbrace{0}_{I^{(2)}_{x_{S2}y_{S2}}}+\underbrace{(-6)\cdot\left(+\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{\pi}\right)\frac{12^2\pi}{8}}_{ST^{(2)}_{x_{S2}y_{S2}\to xy}}\right]-\left[\underbrace{0}_{I^{(3)}_{x_{S3}y_{S3}}}+\underbrace{\left(-\frac{4}{3}\frac{3}{\pi}\right)(-3)\frac{6^2\pi}{8}}_{ST^{(3)}_{x_{S3}y_{S3}\to xy}}\right]=$$

$$=+378\ cm^4$$

$$\underline{\underline{I}}_{xy}=\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1214 & -378 \\ -378 & 5969 \end{bmatrix} cm^4$$

Megjegyzés a centrifugális másodrendű nyomaték számításához:
A saját súlyponti xy tengelykeresztjére minden alkotónak nulla a centrifugális másodrendű nyomatéka, mivel a tengelyek legalább egyike szimmetriatengely. Ezért a teljes síkidom xy koordinátarendszerhez tartozó centrifugális másodrendű nyomatéka csak a Steiner-tagokból tevődik össze.

Egy kis matematika (vektorok és mátrixok két dimenzióban)

A vektorok alapértelmezésben oszlopvektorok:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

Vektor szorzása skalárral:

$$c \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot v_x \\ c \cdot v_y \end{bmatrix}$$

Vektorok skaláris szorzata:

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = u_x v_x + u_y v_y$$

Oszlopvektor transzponáltja (sorvektor):

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix}$$

2x2-es mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Mátrix szorzása skalárral:

$$c \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} \end{bmatrix}$$

Mátrix transzponáltja (transzponálás = tükrözés a főátlóra):

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Mátrix és oszlopvektor szorzata (az eredmény oszlopvektor):

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} v_x + a_{12} v_y \\ a_{21} v_x + a_{22} v_y \end{bmatrix}$$

Mátrix szorzása vektorokkal mindkét oldalról (az eredmény skalár):

$$r = \mathbf{u}^T \mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} v_x + a_{12} v_y \\ a_{21} v_x + a_{22} v_y \end{bmatrix} = u_x \left(a_{11} v_x + a_{12} v_y \right) + u_y \left(a_{21} v_x + a_{22} v_y \right)$$

Elforgatott tengelyekre számított másodrendű nyomatékok

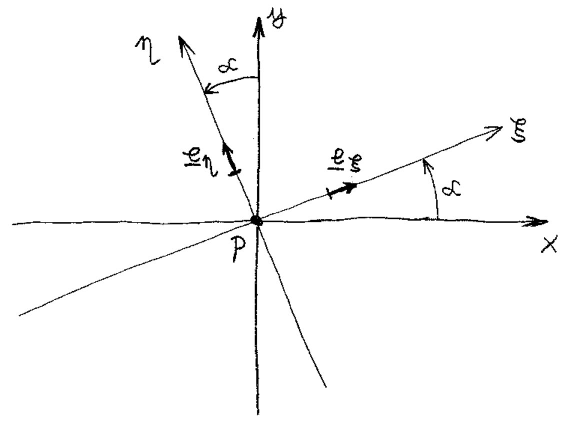
A P ponton átmenő elforgatott $\xi - \eta$ koordinátarendszerhez tartozó másodrendű nyomatékok kiszámítása a P ponton átmenő x-y koordinátarendszerhez tartozó értékekből:

$$I_\xi = \mathbf{e}_\xi^T \mathbf{I}_{P(xy)} \mathbf{e}_\xi$$

$$I_\eta = \mathbf{e}_\eta^T \mathbf{I}_{P(xy)} \mathbf{e}_\eta$$

$$-I_{\xi\eta} = \mathbf{e}_\xi^T \mathbf{I}_{P(xy)} \mathbf{e}_\eta = \mathbf{e}_\eta^T \mathbf{I}_{P(xy)} \mathbf{e}_\xi$$

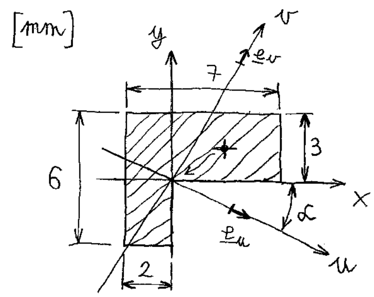
$$\mathbf{I}_{P(\xi\eta)} = \begin{bmatrix} I_\xi & -I_{\xi\eta} \\ -I_{\xi\eta} & I_\eta \end{bmatrix}$$



$\mathbf{e}_\xi$ és $\mathbf{e}_\eta$ az elforgatott tengelyek irányába mutató egységvektorok.

5. példa: A 9. gyakorlat 1. feladata.

Írjuk fel a bejelölt u-v rendszerhez tartozó másodrendű nyomatéki tenzort!



$\alpha = 30^\circ$

$\underline{\underline{I}}_{(u,v)} = ?$

$$I_x = \frac{3^3\cdot 7}{3} + \frac{3^3\cdot 2}{3} = 81\ mm^4$$

$$I_y = \frac{2^3\cdot 6}{3} + \frac{5^3\cdot 3}{3} = 141\ mm^4$$

$$I_{xy} = 0 + \left[0 + (-2{,}5)(-1{,}5)\cdot 5\cdot 3\right] = +56{,}25\ mm^4$$

$$\underline{\underline{I}}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 81 & -56{,}25 \\ -56{,}25 & 141 \end{bmatrix} mm^4$$

$$\underline{e}_u = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ \\ -\sin 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}866 \\ -0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_v = \begin{bmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin 30^\circ \\ \cos 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}866 \end{bmatrix}$$

$$I_u = \underline{e}_u^T \underline{\underline{I}}_{(x,y)} \underline{e}_u = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 81 & -56{,}25 \\ -56{,}25 & 141 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}866 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 98{,}27 \\ -119{,}2 \end{bmatrix} = 144{,}7\ mm^4$$

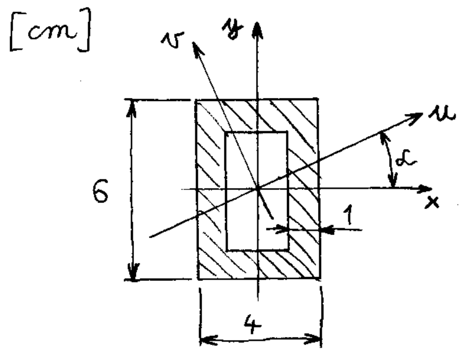
$$I_v = \underline{e}_v^T \underline{\underline{I}}_{(x,y)} \underline{e}_v = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 81 & -56{,}25 \\ -56{,}25 & 141 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}866 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8{,}213 \\ 93{,}98 \end{bmatrix} = 77{,}28\ mm^4$$

$$-I_{uv} = \underline{e}_u^T \underline{\underline{I}}_{(x,y)} \underline{e}_v = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8{,}213 \\ 93{,}98 \end{bmatrix} = -54{,}10\ mm^4$$

$$\underline{\underline{I}}_{(u,v)} = \begin{bmatrix} I_u & -I_{uv} \\ -I_{uv} & I_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 144{,}7 & -54{,}1 \\ -54{,}1 & 77{,}28 \end{bmatrix} mm^4$$

6. példa: Írjuk fel a másodrendű nyomatéki tenzort a bejelölt u-v koordinátarendszerben!



$\alpha = 30^\circ$

$\underline{\underline{I}}_{(u,v)} = ?$

$$I_x = \frac{6^3 \cdot 4}{12} - \frac{4^3 \cdot 2}{12} = 61{,}33 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{4^3 \cdot 6}{12} - \frac{2^3 \cdot 4}{12} = 29{,}33 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 0$$

$$\underline{\underline{I}}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61{,}33 & 0 \\ 0 & 29{,}33 \end{bmatrix} \text{cm}^4$$

$$\underline{e}_u = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_v = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin 30^\circ \\ \cos 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$I_u = \underline{e}_u^T \underline{\underline{I}}_{(x,y)} \underline{e}_u = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 61{,}33 & 0 \\ 0 & 29{,}33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 53{,}11 \\ 14{,}67 \end{bmatrix} = 53{,}33 \text{ cm}^4$$

$$I_v = \underline{e}_v^T \underline{\underline{I}}_{(x,y)} \underline{e}_v = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 61{,}33 & 0 \\ 0 & 29{,}33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -30{,}67 \\ 25{,}40 \end{bmatrix} = 37{,}33 \text{ cm}^4$$

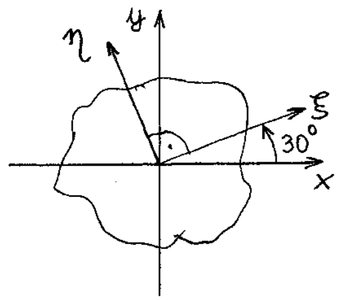
$$-I_{uv} = \underline{e}_v^T \underline{\underline{I}}_{(x,y)} \underline{e}_u = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 53{,}11 \\ 14{,}67 \end{bmatrix} = -13{,}85 \text{ cm}^4$$

$$\underline{\underline{I}}_{(u,v)} = \begin{bmatrix} I_u & -I_{uv} \\ -I_{uv} & I_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53{,}33 & -13{,}85 \\ -13{,}85 & 37{,}33 \end{bmatrix} \text{cm}^4$$

Megjegyzés:
A sin és cos értékeket most gyökös, törtes alakban írtuk föl. Így is lehet, de a számítás során ilyenkor is javasolt az áttérés a tizedes törtekre.

7. példa:

Ismert az xy koordinátarendszerben a másodrendű nyomatékok tenzora. Határozzuk meg a másodrendű nyomatékok tenzorát a $\xi\eta$ koordinátarendszerben, amelyet úgy kapunk, hogy az eredeti koordinátarendszert $+30°$-os szöggel elforgatjuk!



$$\underline{\underline{I}}_{xy} = \begin{bmatrix} 200 & -50 \\ -50 & 100 \end{bmatrix} cm^4$$

$$\underline{\underline{I}}_{\xi\eta} = ?$$

$$\underline{e}_{\xi} = \begin{bmatrix} \cos 30° \\ \sin 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}866 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_{\eta} = \begin{bmatrix} -\sin 30° \\ \cos 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}866 \end{bmatrix}$$

$$I_{\xi} = \underline{e}_{\xi}^{T} \underline{\underline{I}}_{xy} \underline{e}_{\xi} = \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 & -50 \\ -50 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}866 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 148{,}2 \\ 6{,}7 \end{bmatrix} = 131{,}7 \ cm^4$$

$$I_{\eta} = \underline{e}_{\eta}^{T} \underline{\underline{I}}_{xy} \underline{e}_{\eta} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 & -50 \\ -50 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}866 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -143{,}3 \\ 111{,}6 \end{bmatrix} = 168{,}3 \ cm^4$$

$$-I_{\xi\eta} = \underline{e}_{\xi}^{T} \underline{\underline{I}}_{xy} \underline{e}_{\eta} = \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -143{,}3 \\ 111{,}6 \end{bmatrix} = -68{,}30 \ cm^4$$

$$\underline{\underline{I}}_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} I_{\xi} & -I_{\xi\eta} \\ -I_{\xi\eta} & I_{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 131{,}7 & -68{,}3 \\ -68{,}3 & 168{,}3 \end{bmatrix} cm^4$$

Fő-másodrendű nyomatékok és főirányok számítása

Egy P ponton átmenő, de különböző szögállású koordinátarendszerekhez különböző másodrendű nyomaték értékek tartoznak. Az elforgatott koordinátarendszerek között van legalább egy olyan, amelyhez tartozóan a centrifugális másodrendű nyomaték nulla. Ezt a koordinátarendszert a főirányok koordinátarendszerének nevezzük, és 1-es és 2-es tengelyekkel jelöljük. Az is igaz, hogy az 1-es főtengelyre vett másodrendű nyomaték a lehető legnagyobb, a 2-esre vett pedig a lehető legkisebb az azonos ponton átmenő, különböző szögállású tengelyekre számított másodrendű nyomatékok közül. I_1-et és I_2- fő-másodrendű nyomatékoknak nevezzük.

A fő-másodrendű nyomatékok és a főirányok meghatározása az $\mathbf{I}_{xy}$ másodrendű nyomatéki tenzor alapján az

A fő-másodrendű nyomatékokat és a főirányokat a következő sajátérték feladat megoldásaként kapjuk (I_1 és I_2 a két sajátérték):

$$\left(\mathbf{I}_{xy} - I_{1,2}\,\mathbf{E}\right)\mathbf{n} = \mathbf{0}$$

A fő-másodrendű nyomatékok az egyenletrendszer determinánsának kifejtésével adódó másodfokú egyenlet gyökei:

$$\det\left(\mathbf{I}_{xy} - I_{1,2}\mathbf{E}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} I_x - I_{1,2} & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - I_{1,2} \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad I_1, I_2$$

A főirányok irányvektorai a következő visszahelyettesítésekből adódó egyenletrendszerek megoldásai:

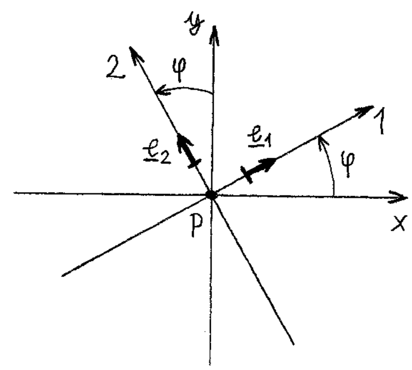
$$\left(\mathbf{I}_{xy} - I_1\,\mathbf{E}\right)\mathbf{n}_1 = \mathbf{0}$$

$$\left(\mathbf{I}_{xy} - I_2\,\mathbf{E}\right)\mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$$

A vektoregyenletek két skalár egyenletet takarnak, amik azonban lineárisan összefüggők, azaz csak az $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ vektorok irányát határozzák meg, a nagyságukat nem. A megoldás során ezért a vektorok x koordinátáját egységnyinek választjuk, majd az y koordinátát valamelyik egyenletből kifejezzük. A gyakorlatban az $\mathbf{n}_2$-t nem visszahelyettesítéssel, hanem az $\mathbf{n}_1$ elforgatásával számoljuk, mert tudjuk, hogy a főtengelyek merőlegesek egymásra.

A koordinátarendszer elforgatásának szöge:

$$tg\varphi = \frac{n_{1y}}{n_{1x}} \quad \rightarrow \quad \varphi$$

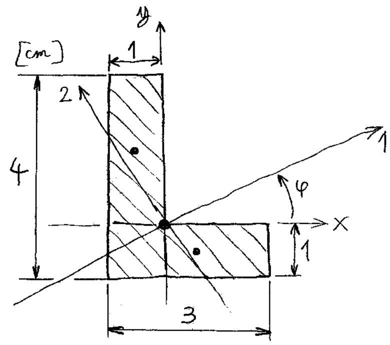


A fő-másodrendű nyomatéki tenzor:

$$\mathbf{I}_{12} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

8. példa: A 9. gyakorlat 2. feladata.

Számítsuk ki a súlyponti fő-másodrendű nyomatékokat! Adjuk meg a főtengelyek irányvektorait (nem kell, hogy egységvektorok legyenek)! Számítsuk ki az x és az 1-es tengely közötti szöget, és ábrázoljuk a főtengelyek helyzetét!



$$I_x = \frac{3^3\cdot 1}{3} + \frac{1^3\cdot 3}{3} = 10\ cm^4$$

$$I_y = \frac{1^3\cdot 4}{3} + \frac{2^3\cdot 1}{3} = 4\ cm^4$$

$$I_{xy} = \left[0 + (+0{,}5)(-1{,}5)\cdot 1\cdot 3\right] + \left[0 + (-0{,}5)(+0{,}5)\cdot 3\cdot 1\right] = -3\ cm^4$$

$$\underline{\underline{I}}_{xy} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} cm^4$$

$$\det\left(\underline{\underline{I}}_{xy} - I_{1,2}\cdot\underline{\underline{E}}\right) = \begin{vmatrix} 10 - I_{1,2} & 3 \\ 3 & 4 - I_{1,2} \end{vmatrix} = (10 - I_{1,2})(4 - I_{1,2}) - 9 =$$

$$= I_{1,2}^2 - 14\, I_{1,2} + 31 = 0$$

$$I_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4\cdot 31}}{2} = 7 \pm 4{,}243 = \begin{cases} I_1 = 11{,}24\ cm^4 \\ I_2 = 2{,}757\ cm^4 \end{cases}$$

$$\left(\underline{\underline{I}}_{xy} - I_1\cdot\underline{\underline{E}}\right)\underline{n}_1 = \underline{0}$$

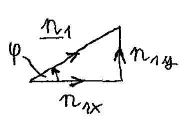
$$\begin{bmatrix} 10 - 11{,}24 & 3 \\ 3 & 4 - 11{,}24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.) $-1{,}24\, n_{1x} + 3\, n_{1y} = 0$

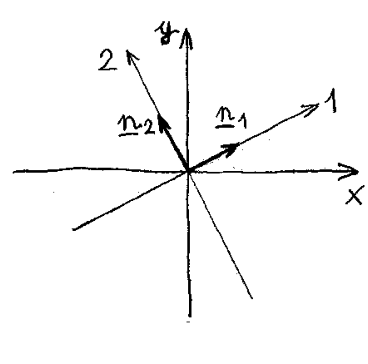
2.) $3\, n_{1x} - 7{,}24\, n_{1y} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} n_{1x} := 1 \\ 1.)\ n_{1y} = \frac{1{,}24}{3} n_{1x} = 0{,}4133 \end{array}\right\} \quad \underline{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4133 \end{bmatrix}$$

$$\underline{n}_2 \perp \underline{n}_1 \longrightarrow \underline{n}_2 = \begin{bmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_{1y} \\ n_{1x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}4133 \\ 1 \end{bmatrix}$$

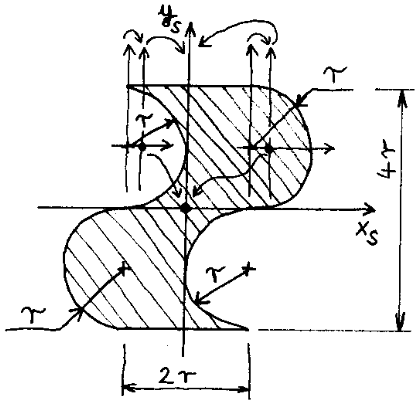


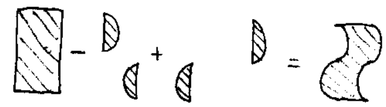
$$tg\,\varphi = \frac{n_{1y}}{n_{1x}} = \frac{0{,}4133}{1} \longrightarrow \varphi = +22{,}46^\circ$$



9. példa: A 9.-ről a 10. gyakorlatra átnyúló feladat.

Számítsuk ki a súlyponti fő-másodrendű nyomatékokat! Számítsuk ki a főtengelyek szöghelyzetét, és ábrázoljuk elhelyezkedésüket! Adjuk meg a főtengelyek irány **egység**vektorait!





$$I_{x_s}=\frac{(4r)^3\cdot 2r}{12}=10,67\ r^4$$

$$I_{y_s}=\frac{(2r)^3\cdot 4r}{12}-2\left[\frac{r^4\pi}{8}-\left(\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)^2\frac{r^2\pi}{2}+\left(r-\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)^2\frac{r^2\pi}{2}\right]+2\left[\frac{r^4\pi}{8}-\left(\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)^2\frac{r^2\pi}{2}+\left(r+\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)^2\frac{r^2\pi}{2}\right]=$$

$$=\frac{(2r)^3\cdot 4r}{12}+r^2\pi\left[\left(r+\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)^2-\left(r-\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)^2\right]=8\ r^4$$

$$I_{x_s y_s}=0-2\left[0+\left(r-\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)(-r)\frac{r^2\pi}{2}\right]+2\left[0+\left(-r-\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)(-r)\frac{r^2\pi}{2}\right]=$$

$$=r^2\pi\left[r\left(r-\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)+r\left(r+\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)\right]=+6,283\ r^4$$

Megjegyzés:
I_{xs} számításánál a hozzáadott és kivont félkörök másodrendű nyomatékai egyenlők, így csak a befoglaló téglalappal kell számolnunk.
I_{ys} és I_{xsys} számításánál a 2-es szorzók azért alkalmazhatók, mert a két hozzáadott és a két kivont kör ezekre nézve szimmetrikusan helyezkedik el.

$$\underline{\underline{I}}_s^{x_s y_s}=\begin{bmatrix}10,67 & -6,283\\ -6,283 & 8\end{bmatrix}r^4$$

$$\det\left(\underline{\underline{I}}_s^{x_s y_s}-I_{1,2}\,\underline{\underline{E}}\right)=\begin{vmatrix}10,67r^4-I_{1,2} & -6,283r^4\\ -6,283r^4 & 8r^4-I_{1,2}\end{vmatrix}=$$

$$=\left(10,67r^4-I_{1,2}\right)\left(8r^4-I_{1,2}\right)-\left(6,283r^4\right)^2=I_{1,2}^2-18,67r^4\cdot I_{1,2}+45,88r^8=0$$

$$I_{1,2}=\frac{18,67r^4\pm\sqrt{\left(18,67r^4\right)^2-4\cdot 45,88r^8}}{2}=\left(9,335\pm 6,424\right)r^4=\begin{cases}\boxed{I_1=15,76\ r^4}\\ \boxed{I_2=2,911\ r^4}\end{cases}$$

$$\left(\underline{\underline{I}}_S^{x_S y_S} - I_1 \underline{\underline{E}}\right)\underline{n}_1 = \underline{0}$$

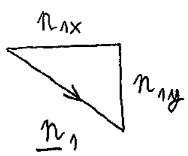
$$\begin{bmatrix} 10{,}67-15{,}76 & -6{,}283 \\ -6{,}283 & 8-15{,}76 \end{bmatrix} r^4 \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.) $-5{,}09\, n_{1x} - 6{,}283\, n_{1y} = 0$

2.) $-6{,}283\, n_{1x} - 7{,}76\, n_{1y} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} n_{1x} := 1 \\ 2.)\ n_{1y} = \dfrac{-6{,}283}{7{,}76} n_{1x} = -0{,}8097 \end{array}\right\} \rightarrow \underline{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}8097 \end{bmatrix}$$

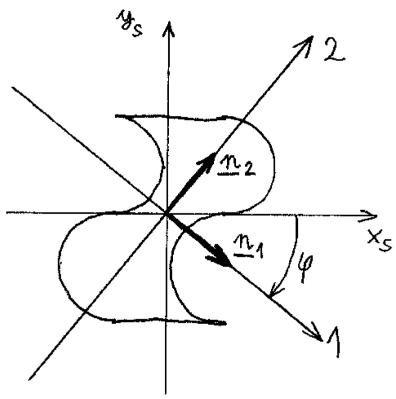
$$\underline{n}_2 \perp \underline{n}_1 \longrightarrow \underline{n}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}8097 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{n_{1y}}{n_{1x}} = \frac{-0{,}8097}{1} \longrightarrow \boxed{\varphi = -39{,}00^\circ}$$

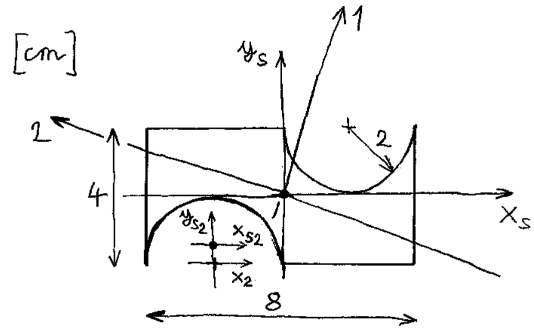
$$|\underline{n}_1| = \sqrt{1^2 + 0{,}8097^2} = 1{,}287$$

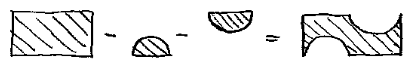
$$\boxed{\underline{e}_1} = \frac{\underline{n}_1}{|\underline{n}_1|} = \frac{1}{1{,}287}\begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}8097 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0{,}777 \\ -0{,}6291 \end{bmatrix}} \qquad \boxed{\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}6291 \\ 0{,}777 \end{bmatrix}}$$



10. példa:

Számítsuk ki a súlyponti fő-másodrendű nyomatékokat! Adjuk meg a főtengelyek irányvektorait! Határozzuk meg az x és az 1-es tengely közötti szöget, és ábrázoljuk a főtengelyek helyzetét!





$$I_{x_s} = \underbrace{\frac{4^3\cdot 8}{12}}_{I^{(1)}_{x_s}} - \Bigg[\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{2^4\pi}{8}}_{I^{(2)}_{x_2}} - \underbrace{\left(\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)^2\cdot\frac{2^2\pi}{2}}_{ST^{(2)}_{x_2\to x_{s2}}}}_{I^{(2)}_{x_{s2}}} + \underbrace{\left(2-\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)^2\cdot\frac{2^2\pi}{2}}_{ST^{(2)}_{x_{s2}\to x_s}}}_{I^{(2)}_{x_s}}\Bigg]\cdot 2 = 22{,}53\ cm^4$$

$$I_{y_s} = \underbrace{\frac{8^3\cdot 4}{12}}_{I^{(1)}_{y_s}} - \Bigg[\underbrace{\underbrace{\frac{2^4\pi}{8}}_{I^{(2)}_{y_{s2}}} + \underbrace{2^2\cdot\frac{2^2\pi}{2}}_{ST^{(2)}_{y_{s2}\to y_s}}}_{I^{(2)}_{y_s}}\Bigg]\cdot 2 = 107{,}9\ cm^4$$

$$I_{x_s y_s} = \underbrace{0}_{I^{(1)}_{x_s y_s}} - \Bigg[\underbrace{\underbrace{0}_{I^{(2)}_{x_{s2}y_{s2}}} + \underbrace{(+2)\left(+2-\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}\right)\frac{2^2\pi}{2}}_{ST^{(2)}_{x_{s2}y_{s2}\to x_s y_s}}}_{I^{(2)}_{x_s y_s}}\Bigg]\cdot 2 = -28{,}91\ cm^4$$

Megjegyzés:
A félkörök másodrendű nyomatékát az x_S tengelyre csak két Steiner-taggal tudjuk átszámítani. Ennek oka, hogy a Steiner-tétel két nem súlyponti tengely között nem alkalmazható. Így az átmérő tengelyről először át kell menni a saját súlyponti tengelyre, majd innen kell tovább menni a közös súlyponti tengelyre, ami a félkörnek szintén nem súlyponti tengelye.
A 2-es szorzók a félkörök szimmetrikus helyzete miatt használhatók.

$$\underline{\underline{I}}_S^{x_s y_s} = \begin{bmatrix} I_{x_s} & -I_{x_s y_s} \\ -I_{x_s y_s} & I_{y_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22,53 & 28,91 \\ 28,91 & 107,9 \end{bmatrix} cm^4$$

$$\det\left(\underline{\underline{I}}_S^{x_s y_s} - I_{1,2}\,\underline{\underline{E}}\right) = \begin{vmatrix} 22,53 - I_{1,2} & 28,91 \\ 28,91 & 107,9 - I_{1,2} \end{vmatrix} =$$

$$= (22,53 - I_{1,2})(107,9 - I_{1,2}) - 28,91^2 = I_{1,2}^2 - 130,4\, I_{1,2} + 1595 = 0$$

$$I_{1,2} = \frac{130,4 \pm \sqrt{130,4^2 - 4 \cdot 1595}}{2} = 65,2 \pm 51,54 = \begin{cases} \boxed{I_1 = 116,7\ cm^4} \\ \boxed{I_2 = 13,66\ cm^4} \end{cases}$$

$$\left(\underline{\underline{I}}_S^{x_s y_s} - I_1\,\underline{\underline{E}}\right)\underline{n}_1 = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 22,53 - 116,7 & 28,91 \\ 28,91 & 107,9 - 116,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.) $-94,17\, n_{1x} + 28,91\, n_{1y} = 0$

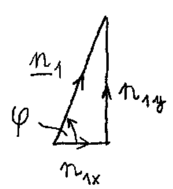
2.) $28,91\, n_{1x} - 8,8\, n_{1y} = 0$

$n_{1x} := 1$

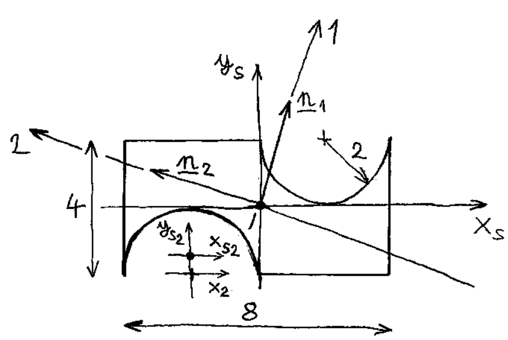
1.) $n_{1y} = \frac{94,17}{28,91} n_{1x} = 3,285$

$$\boxed{\underline{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3,257 \end{bmatrix}}$$

$$\underline{n}_2 \perp \underline{n}_1 \rightarrow \boxed{\underline{n}_2 = \begin{bmatrix} -3,257 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

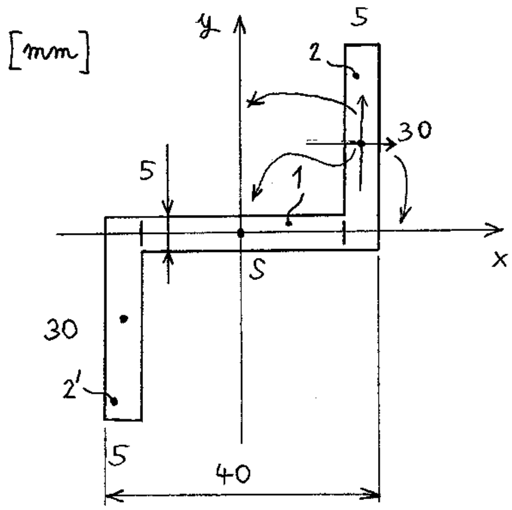


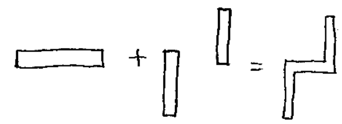
$$tg\,\varphi = \frac{n_{1y}}{n_{1x}} = \frac{3,257}{1} = 72,93^\circ$$



11. példa:

Számítsuk ki a súlyponti fő-másodrendű nyomatékokat! Adjuk meg a fő-másodrendű nyomatéki tengelyek irányvektorait! Számítsuk ki a főtengelyek szöghelyzetét, és ábrázoljuk elhelyezkedésüket!





$$I_x = \frac{5^3 \cdot 30}{12} + 2\left[\frac{30^3 \cdot 5}{12} + 12{,}5^2 \cdot 5 \cdot 30\right] = 69\,688 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{30^3 \cdot 5}{12} + 2\left[\frac{5^3 \cdot 30}{12} + 17{,}5^2 \cdot 5 \cdot 30\right] = 103\,750 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = 0 + 2\left[0 + (-17{,}5)(-12{,}5) \cdot 5 \cdot 30\right] = 32\,813 \text{ mm}^4$$

$$\underline{\underline{I}}_S^{x,y} = \begin{bmatrix} 69\,688 & -32\,813 \\ -32\,813 & 103\,750 \end{bmatrix} \text{mm}^4$$

$$\det\left(\underline{\underline{I}}_S^{x,y} - I_{1,2}\,\underline{\underline{E}}\right) = \begin{vmatrix} 69\,688 - I_{1,2} & -32\,813 \\ -32\,813 & 103\,750 - I_{1,2} \end{vmatrix} =$$

$$= (69\,688 - I_{1,2})(103\,750 - I_{1,2}) - 32\,813^2 = I_{1,2}^2 - 173\,438 \cdot I_{1,2} + 6{,}153 \cdot 10^9 = 0$$

$$\boxed{I_{1,2}} = \frac{173\,438 \pm \sqrt{173\,438^2 - 4 \cdot 6{,}153 \cdot 10^9}}{2} = 86\,719 \pm 36\,975 = \begin{cases} \boxed{I_1 = 123\,694 \text{ mm}^4} \\ \boxed{I_2 = 49\,744 \text{ mm}^4} \end{cases}$$

$$\left(\underline{\underline{I}}_S^{x,y} - I_1 \underline{\underline{E}}\right)\underline{n}_1 = \underline{0}$$

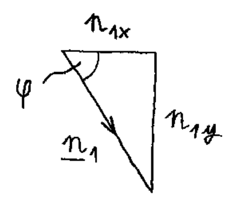
$$\begin{bmatrix} 69688-123694 & -32813 \\ -32813 & 103750-123694 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1.)\quad -54006\, n_{1x} - 32813\, n_{1y} = 0$$

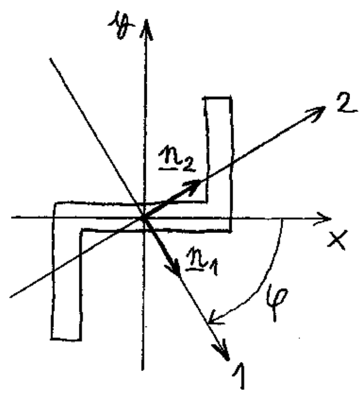
$$2.)\quad -32813\, n_{1x} - 19944\, n_{1y} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} n_{1x} := 1 \\ 1.)\quad n_{1y} = \dfrac{-54006}{32813}\, n_{1x} = -1{,}646 \end{array}\right\} \longrightarrow \underline{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}646 \end{bmatrix}$$

$$\underline{n}_2 \perp \underline{n}_1 \longrightarrow \underline{n}_2 = \begin{bmatrix} 1{,}646 \\ 1 \end{bmatrix}$$

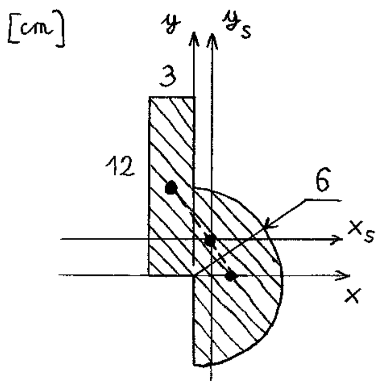


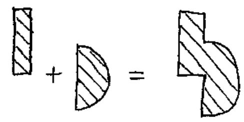
$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{n_{1y}}{n_{1x}} = \frac{-1{,}646}{1} \longrightarrow \boxed{\varphi = -58{,}72^\circ}$$



12. példa:

Írjuk fel a másodrendű nyomatéki tenzort a súlyponti x-y rendszerben! Írjuk fel a másodrendű nyomatéki tenzort a súlyponti 1-2 rendszerben! Számítsuk ki és ábrázoljuk a főtengelyek helyzetét!





$$x_s = \frac{+(-1{,}5)\cdot 3\cdot 12 + \left(+\frac{4}{3}\frac{6}{\pi}\right)\frac{6^2\pi}{2}}{+3\cdot 12 + \frac{6^2\pi}{2}} = \frac{+90}{92{,}55} = +0{,}9724\ mm$$

$$y_s = \frac{+(+6)\cdot 3\cdot 12 + 0}{92{,}55} = \frac{+216}{92{,}55} = +2{,}334\ mm$$

$$I_{x_s} = \frac{12^3\cdot 3}{3} + \frac{6^4\pi}{8} - 2{,}334^2\cdot 92{,}55 = 1733\ cm^4$$

$$I_{y_s} = \frac{3^3\cdot 12}{3} + \frac{6^4\pi}{8} - 0{,}9724^2\cdot 92{,}55 = 529{,}4\ cm^4$$

$$I_{x_s y_s} = \left[0 + (+1{,}5)(-6)\cdot 3\cdot 12\right] + \left[0\right] - (+0{,}9724)(+2{,}334)\cdot 92{,}55 = -534{,}0\ cm^4$$

$$\underline{\underline{I}}_{s(x,y)} = \begin{bmatrix} I_{x_s} & -I_{x_s y_s} \\ -I_{x_s y_s} & I_{y_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1733 & +534 \\ +534 & 529{,}4 \end{bmatrix} cm^4$$

$$\det\left(\underline{\underline{I}}_{s(x,y)} - I_{1,2}\underline{\underline{E}}\right) = \begin{vmatrix} 1733 - I_{1,2} & 534 \\ 534 & 529{,}4 - I_{1,2} \end{vmatrix} =$$

$$= (1733 - I_{1,2})(529{,}4 - I_{1,2}) - 534^2 = I_{1,2}^2 - 2262\, I_{1,2} + 632\,294 = 0$$

$$I_{1,2} = \frac{2262 \pm \sqrt{2262^2 - 4\cdot 632\,294}}{2} = 1131 \pm 804{,}3 = \begin{cases} I_1 = 1935\ cm^4 \\ I_2 = 326{,}7\ cm^4 \end{cases}$$

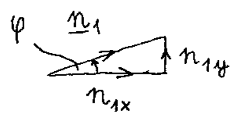
$$\underline{\underline{I}}_{s(1,2)} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1936 & 0 \\ 0 & 326{,}6 \end{bmatrix} cm^4$$

$$\left(\underline{\underline{I}}_{s(x,y)} - I_1 \cdot \underline{\underline{E}}\right)\underline{n}_1 = \underline{0}$$

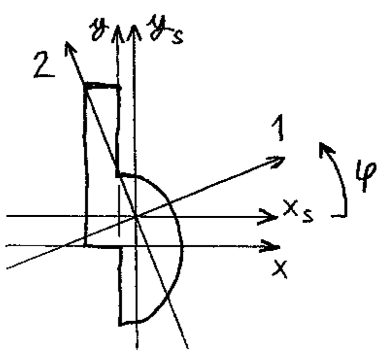
$$\begin{bmatrix} 1733-1935 & 534 \\ 534 & 529,4-1935 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} &1.)\ -202\,n_{1x} + 534\,n_{1y} = 0 \\ &2.)\ 534\,n_{1x} - 1405,6\,n_{1y} = 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &n_{1x} := 1 \\ &1.)\ n_{1y} = \frac{202}{534} n_{1x} = 0,3783 \end{aligned}\right\} \underline{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,3783 \end{bmatrix}$$

$$\underline{n}_2 \perp \underline{n}_1 \rightarrow \underline{n}_2 = \begin{bmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_{1y} \\ n_{1x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,3783 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{n_{1y}}{n_{1x}} = \frac{0,3783}{1} \longrightarrow \varphi = 20,72^\circ$$



13. példa:

Ismert az xy koordinátarendszerben a másodrendű nyomatékok tenzora. Határozzuk meg a fő-másodrendű nyomatékokat és a főirányokat (irányvektorokkal, irányszögekkel és ábrával)!

$$\underline{\underline{I}}_{xy} = \begin{bmatrix} 100 & -40 \\ -40 & 50 \end{bmatrix} cm^4$$

$$\det\left(\underline{\underline{I}}_{xy} - I_{1,2}\cdot\underline{\underline{E}}\right) = \begin{vmatrix} 100-I_{1,2} & -40 \\ -40 & 50-I_{1,2} \end{vmatrix} =$$

$$= (100-I_{1,2})(50-I_{1,2}) - 40^2 = I_{1,2}^2 - 150\, I_{1,2} + 3400 = 0$$

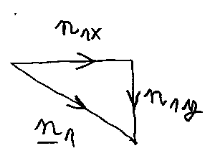
$$I_{1,2} = \frac{+150 \pm \sqrt{150^2 - 4\cdot 3400}}{2} = 75 \pm 47{,}17 = \begin{cases} \boxed{I_1 = 122{,}2\ cm^4} \\ \boxed{I_2 = 27{,}83\ cm^4} \end{cases}$$

$$\left(\underline{\underline{I}}_{xy} - I_1\cdot\underline{\underline{E}}\right)\underline{n}_1 = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 100-122{,}2 & -40 \\ -40 & 50-122{,}2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 1.)\ -22{,}2\, n_{1x} - 40\, n_{1y} = 0 \\ 2.)\ -40\, n_{1x} - 72{,}2\, n_{1y} = 0 \end{matrix}$$

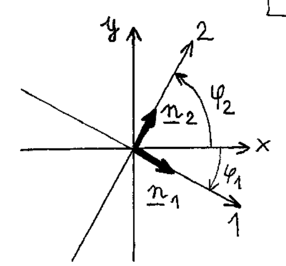
$$\left.\begin{matrix} n_{1x} := 1 \\ 1.)\ n_{1y} = \frac{-22{,}2}{40} n_{1x} = -0{,}555 \end{matrix}\right\} \boxed{\underline{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}555 \end{bmatrix}}$$

$$\underline{n}_2 \perp \underline{n}_1 \longrightarrow \boxed{\underline{n}_2 = \begin{bmatrix} -n_{1y} \\ n_{1x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}555 \\ 1 \end{bmatrix}}$$



$$\mathrm{tg}\,\varphi_1 = \frac{n_{1y}}{n_{1x}} = \frac{-0{,}555}{1} \longrightarrow \boxed{\varphi_1 = -29{,}03^\circ}$$

$$\boxed{\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ = -29{,}03 + 90 = +60{,}97^\circ}$$



$$\underline{\underline{I}}_{12} = \begin{bmatrix} 122{,}2 & 0 \\ 0 & 27{,}83 \end{bmatrix} cm^4$$