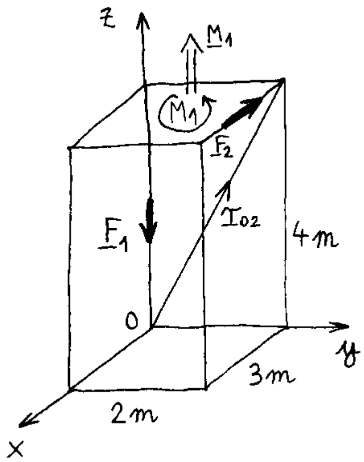
1. példa: A 4. heti gyakorlat feladata.

Számítsuk ki az erőrendszer O ponthoz tartozó redukált vektorkettősét! Adjuk meg a centrális egyenes egy pontjának koordinátáit! Írjuk fel a centrális egyenes egyenletét! Számítsuk ki a főerőpár vektorát, és az O ponti redukált nyomaték merőleges komponensét!



$F_1 = 8\,kN$

$F_2 = 6\,kN$

$M_1 = 10\,kNm$

C.E. egy pontja? $\quad \underline{r}_P = ?$

C.E. egyenlete? $\quad \underline{r}_{CE}(\lambda) = ?$

$\underline{M}_F = ?$ főerőpár?

$\underline{M}_\perp = ?$

$$\underline{F}_1 = F_1 \cdot \underline{e}_{F_1} = 8\cdot(-\underline{k}) = -8\,\underline{k} \quad [kN]$$

$$\underline{F}_2 = F_2 \cdot \underline{e}_{F_2} = 6\cdot(-\underline{i}) = -6\,\underline{i} \quad [kN]$$

$$\underline{M}_1 = M_1 \cdot \underline{e}_{M_1} = 10\cdot(+\underline{k}) = 10\,\underline{k} \quad [kNm] \quad \leftarrow \quad \underline{M}_1$$

$$\underline{F} = \sum \underline{F}_i = (-8\underline{k}) + (-6\underline{i}) = -6\underline{i} - 8\underline{k} \quad [kN]$$

$$\underline{M}_0 = \sum \underline{M}_i + \sum \underline{r}_{0i} \times \underline{F}_i$$

$\underline{r}_{01} = \underline{0}$ ← A hatásvonal átmegy az origón.

$$\underline{r}_{02} = 2\underline{j} + 4\underline{k} \quad [m]$$

$$\underline{r}_{01} \times \underline{F}_1 = \underline{0}$$

$$\underline{r}_{02} \times \underline{F}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 2 & 4 \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0) - \underline{j}(0+24) + \underline{k}(0+12) = -24\underline{j} + 12\underline{k} \quad [kNm]$$

$$\underline{M}_0 = \left[10\underline{k}\right] + \left[\underline{0} + (-24\underline{j} + 12\underline{k})\right] = -24\underline{j} + 22\underline{k} \quad [kNm]$$

$$\underline{r}_P = \underline{r}_{OP} = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_0}{\underline{F}^2}$$

$$\underline{F} \times \underline{M}_0 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -6 & 0 & -8 \\ 0 & -24 & 22 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-192) - \underline{j}(-132-0) + \underline{k}(144-0) =$$

$$= -192\,\underline{i} + 132\,\underline{j} + 144\,\underline{k}$$

$$\underline{F}^2 = 6^2 + 0^2 + 8^2 = 100$$

$$\boxed{\underline{r}_P = \frac{-192\,\underline{i} + 132\,\underline{j} + 144\,\underline{k}}{100} = -1{,}92\,\underline{i} + 1{,}32\,\underline{j} + 1{,}44\,\underline{k}\ [m]}$$

$$\underline{r}_{CE}(\lambda) = \underline{r}_P + \lambda\,\underline{e}_F$$

$$\underline{e}_F = \frac{\underline{F}}{|\underline{F}|} = \frac{-6\,\underline{i} - 8\,\underline{j}}{\sqrt{6^2+8^2}} = -0{,}6\,\underline{i} - 0{,}8\,\underline{j}$$

$$\boxed{\underline{r}_{CE}(\lambda) = (-1{,}92\,\underline{i} + 1{,}32\,\underline{j} + 1{,}44\,\underline{k}) + \lambda(-0{,}6\,\underline{i} - 0{,}8\,\underline{j})}$$

$$\underline{M}_F = \underline{M}_{\parallel} = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_0}{\underline{F}^2} \cdot \underline{F}$$

$$\underline{F} \cdot \underline{M}_0 = (-6\,\underline{i} - 8\,\underline{k}) \cdot (-24\,\underline{j} + 22\,\underline{k}) = 0 + 0 - 176 = -176$$

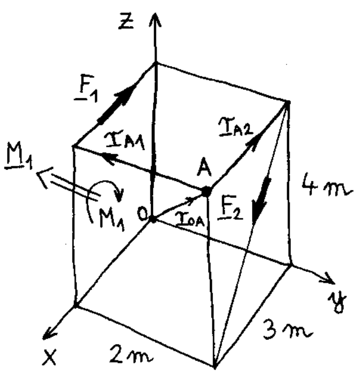
$$\boxed{\underline{M}_F = \frac{-176}{100}(-6\,\underline{i} - 8\,\underline{k}) = 10{,}56\,\underline{i} + 14{,}08\,\underline{k}\ [kNm]}$$

$$\boxed{\underline{M}_\perp} = \underline{M}_0 - \underline{M}_{\parallel} = (-24\,\underline{j} + 22\,\underline{k}) - (10{,}56\,\underline{i} + 14{,}08\,\underline{k}) =$$

$$\boxed{= -10{,}56\,\underline{i} - 24\,\underline{j} + 7{,}92\,\underline{k}\ [kNm]}$$

2. példa:

Számítsuk ki az erőrendszer A ponthoz tartozó eredő vektorkettősét! Adjuk meg a centrális egyenes egy pontjának koordinátáit! Írjuk fel a centrális egyenes egyenletét! Számítsuk ki a főerőpár vektorát, és az A ponti redukált nyomaték merőleges komponensét!



$F_1 = F_2 = 100\,N$

$M_1 = 100\ Nm$

$[\underline{F}, \underline{M}_A] = ?$

$\underline{r}_P = ?$ ← C.E. egy pontja

$\underline{r}_{CE}(\lambda) = ?$ ← C.E. egyenlete

$\underline{M}_F = ?$ ← főerőpár

$\underline{M}_\perp = ?$ ← merőleges komponens

$$\underline{F}_1 = F_1 \cdot \underline{e}_{F_1} = 100 \cdot (-\underline{i}) = -100\,\underline{i}\ [N]$$

$$\underline{F}_2 = F_2 \cdot \underline{e}_{F_2} = 100\,\frac{3\underline{i} - 4\underline{k}}{\sqrt{3^2+4^2}} = 60\,\underline{i} - 80\,\underline{k}\ [N]$$

$$\underline{M}_1 = M_1 \cdot \underline{e}_{M_1} = 100 \cdot (-\underline{j}) = -100\,\underline{j}\ [Nm] \leftarrow$$

$$\boxed{\underline{F} = \sum \underline{F}_i = (-100\,\underline{i}) + (60\,\underline{i} - 80\,\underline{k}) = -40\,\underline{i} - 80\,\underline{k}\ [N]}$$

$$\underline{M}_A = \sum \underline{M}_i + \sum \underline{r}_{Ai} \times \underline{F}_i$$

$$\underline{r}_{A1} = -2\,\underline{j}\ [m]$$

$$\underline{r}_{A2} = -3\,\underline{i}\ [m]$$

$$\underline{r}_{A1} \times \underline{F}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & -2 & 0 \\ -100 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0) - \underline{j}(0-0) + \underline{k}(0-200) = -200\,\underline{k}\ [Nm]$$

$$\underline{r}_{A2} \times \underline{F}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -3 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & -80 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0) - \underline{j}(240-0) + \underline{k}(0-0) = -240\,\underline{j}\ [Nm]$$

$$\boxed{\underline{M}_A = [-100\,\underline{j}] + [(-200\,\underline{k}) + (-240\,\underline{j})] = -340\,\underline{j} - 200\,\underline{k}\ [Nm]}$$

$$\underline{r}_P = \underline{r}_{OP} = \underline{r}_{OA} + \underline{r}_{AP}$$

$$\underline{r}_{AP} = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_A}{\underline{F}^2}$$

$$\underline{F} \times \underline{M}_A = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -40 & 0 & -80 \\ 0 & -340 & -200 \end{vmatrix} = \underline{i}(0 - 27200) - \underline{j}(8000 - 0) + \underline{k}(13600 - 0) =$$

$$= -27200\,\underline{i} - 8000\,\underline{j} + 13600\,\underline{k}$$

$$\underline{F}^2 = 40^2 + 80^2 = 8000$$

$$\underline{r}_{AP} = \frac{-27200\,\underline{i} - 8000\,\underline{j} + 13600\,\underline{k}}{8000} = -3{,}4\,\underline{i} - 1\,\underline{j} + 1{,}7\,\underline{k}\ [m]$$

$$\boxed{\underline{r}_P = (3\,\underline{i} + 2\,\underline{j} + 4\,\underline{k}) + (-3{,}4\,\underline{i} - 1\,\underline{j} + 1{,}7\,\underline{k}) = -0{,}4\,\underline{i} + 1\,\underline{j} + 5{,}7\,\underline{k}\ [m]}$$

$$\underline{r}_{cE}(\lambda) = \underline{r}_P + \lambda\,\underline{e}_F$$

$$\underline{e}_F = \frac{\underline{F}}{|\underline{F}|} = \frac{-40\,\underline{i} - 80\,\underline{k}}{\sqrt{40^2 - 80^2}} = -0{,}4472\,\underline{i} - 0{,}8944\,\underline{k}$$

$$\boxed{\underline{r}_{cE}(\lambda) = (-0{,}4\,\underline{i} + 1\,\underline{j} + 5{,}7\,\underline{k}) + \lambda(-0{,}4472\,\underline{i} - 0{,}8944\,\underline{k})}$$

$$\underline{M}_F = \underline{M}_{\parallel} = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_A}{\underline{F}^2} \cdot \underline{F}$$

$$\underline{F} \cdot \underline{M}_A = (-40\,\underline{i} - 80\,\underline{k}) \cdot (-340\,\underline{j} - 200\,\underline{k}) = 16\,000$$

$$\boxed{\underline{M}_F = \frac{16\,000}{8\,000}(-40\,\underline{i} - 80\,\underline{k}) = -80\,\underline{i} - 160\,\underline{k}\ [Nm]}$$

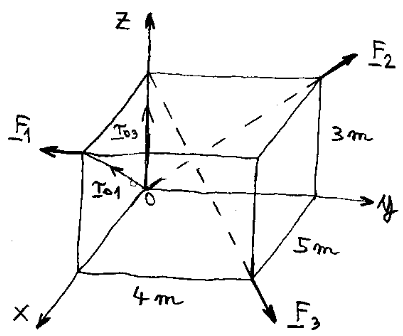
$$\boxed{\underline{M}_{\perp}} = \underline{M} - \underline{M}_{\parallel} = (-340\,\underline{j} - 200\,\underline{k}) - (-80\,\underline{i} - 160\,\underline{k}) =$$

$$= \boxed{80\,\underline{i} - 340\,\underline{j} - 40\,\underline{k}\ [Nm]}$$

Megjegyzés:
Mivel először redukálást kértek az A pontra, az A ponti adatokat használtuk a centrális egyenes meghatározásához. Így viszont vigyáznunk kellett arra, hogy a centrális egyenes egy pontjának helyvektorát először az A ponthoz relatívan kaptuk meg, vagyis ahhoz még hozzá kellett adnunk az A pont helyvektorát is.

3. példa:

Számítsuk ki az erőrendszer nyomatékát a koordinátatengelyekre! Adjuk meg az O ponti redukált vektorkettőst, valamint a centrális egyenes egy pontját és a főerőpárt!



$F_1 = 5\,N$

$F_2 = 5\,N$

$F_3 = \sqrt{50}\,N$

$$\underline{F}_1 = F_1\,\underline{e}_{F_1} = 5\,(-\underline{j}) = -5\,\underline{j} \quad [N]$$

$$\underline{F}_2 = F_2\,\underline{e}_{F_2} = 5\,\frac{4\underline{j}+3\underline{k}}{\sqrt{4^2+3^2}} = 4\underline{j}+3\underline{k} \quad [N]$$

$$\underline{F}_3 = F_3\,\underline{e}_{F_3} = \sqrt{50}\,\frac{5\underline{i}+4\underline{j}-3\underline{k}}{\sqrt{5^2+4^2+3^2}} = 5\underline{i}+4\underline{j}-3\underline{k} \quad [N]$$

$$\boxed{\underline{F} = \sum \underline{F}_i = (-5\underline{j})+(4\underline{j}+3\underline{k})+(5\underline{i}+4\underline{j}-3\underline{k}) = 5\underline{i}+3\underline{j} \quad [N]}$$

$$\underline{M}_0 = \sum \underline{M}_i + \sum \underline{r}_{0i} \times \underline{F}_i$$

$$\underline{r}_{01} = 5\underline{i}+3\underline{k} \quad [m]$$

$$\underline{r}_{02} = \underline{0}$$

$$\underline{r}_{03} = 3\underline{k} \quad [m]$$

$$\underline{r}_{01} \times \underline{F}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}(0+15)-\underline{j}(0-0)+\underline{k}(-25-0) = 15\underline{i}-25\underline{k} \quad [Nm]$$

$$\underline{r}_{02} \times \underline{F}_2 = \underline{0}$$

$$\underline{r}_{03} \times \underline{F}_3 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-12)-\underline{j}(0-15)+\underline{k}(0-0) = -12\underline{i}+15\underline{j} \quad [Nm]$$

$$\boxed{\underline{M}_0 = [\underline{0}]+[(15\underline{i}-25\underline{k})+(\underline{0})+(-12\underline{i}+15\underline{j})] = 3\underline{i}+15\underline{j}-25\underline{k} \quad [Nm]}$$

$$\boxed{M_x = \underline{M}_0 \cdot \underline{i} = 3\ \text{Nm}}$$

$$\boxed{M_y = \underline{M}_0 \cdot \underline{j} = 15\ \text{Nm}}$$

$$\boxed{M_z = \underline{M}_0 \cdot \underline{k} = -25\ \text{Nm}}$$

$$\underline{r}_P = \underline{r}_{OP} = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_0}{\underline{F}^2}$$

$$\underline{F} \times \underline{M}_0 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5 & 3 & 0 \\ 3 & 15 & -25 \end{vmatrix} = \underline{i}(-75-0) - \underline{j}(-125-0) + \underline{k}(75-9) = -75\underline{i} + 125\underline{j} + 66\underline{k}$$

$$\underline{F}^2 = 5^2 + 3^2 + 0^2 = 34$$

$$\boxed{\underline{r}_P = \frac{-75\underline{i} + 125\underline{j} + 66\underline{k}}{34} = -2{,}206\underline{i} + 3{,}676\underline{j} + 1{,}941\underline{k}\ [m]}$$

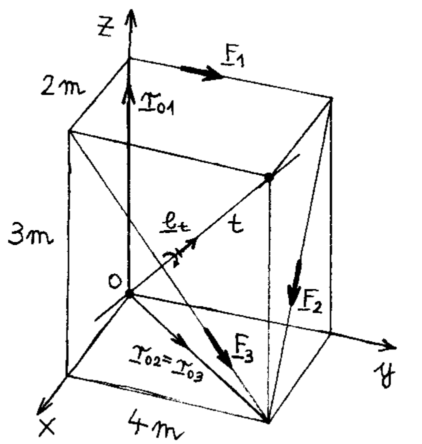
$$\underline{M}_F = \underline{M}_{\parallel} = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_0}{\underline{F}^2} \cdot \underline{F}$$

$$\underline{F} \cdot \underline{M}_0 = (5\underline{i} + 3\underline{j})(3\underline{i} + 15\underline{j} - 25\underline{k}) = 15 + 45 = 60$$

$$\boxed{\underline{M}_F = \frac{60}{34}(5\underline{i} + 3\underline{j}) = 8{,}824\underline{i} + 5{,}294\underline{j}\ [\text{Nm}]}$$

4. példa:

Számítsuk ki az erőrendszer O pontra számított eredő vektorkettősét! Mekkora az erőrendszer nyomatéka a t tengelyre? Számítsuk ki a főerőpár vektorát! Adjuk meg a centrális egyenes egy pontjának koordinátáit!



$$|\underline{F}_1| = 600\,\text{N}$$

$$\underline{F}_2 = 400\,\underline{i} - 600\,\underline{k}\ [\text{N}]$$

$$|\underline{F}_3| = 1000\,\text{N}$$

$$[\underline{F}\,;\underline{M}_o] = ?$$

$$M_t = ?$$

$$\underline{M}_F = ?$$

$$\underline{r}_P = ? \quad (\text{c.e. egy pontja})$$

$$\underline{F}_1 = |\underline{F}_1| \cdot \underline{e}_{F_1} = 600 \cdot (+\underline{j}) = 600\,\underline{j}\ [\text{N}]$$

$$\underline{F}_3 = |\underline{F}_3| \cdot \underline{e}_{F_3} = 1000\,\frac{4\underline{j} - 3\underline{k}}{\sqrt{4^2+3^2}} = 800\,\underline{j} - 600\,\underline{k}\ [\text{N}]$$

$$\boxed{\underline{F} = \sum \underline{F}_i = (600\,\underline{j}) + (400\,\underline{i} - 600\,\underline{k}) + (800\,\underline{j} - 600\,\underline{k}) = 400\,\underline{i} + 1400\,\underline{j} - 1200\,\underline{k}}$$

$$\underline{M}_o = \sum \underline{M}_i + \sum \underline{r}_{oi} \times \underline{F}_i$$

$$\underline{r}_{o1} = 3\,\underline{k}\ [\text{m}]$$

$$\underline{r}_{o2} = \underline{r}_{o3} = 2\,\underline{i} + 4\,\underline{j}\ [\text{m}]$$

$$\underline{r}_{o1} \times \underline{F}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 600 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-1800) - \underline{j}(0-0) + \underline{k}(0-0) = -1800\,\underline{i}\ [\text{Nm}]$$

$$\underline{r}_{o2} \times \underline{F}_2 + \underline{r}_{o3} \times \underline{F}_3 = \underline{r}_{o2} \times (\underline{F}_2 + \underline{F}_3) \quad \leftarrow \underline{r}_{o2} = \underline{r}_{o3}$$

$$\underline{F}_2 + \underline{F}_3 = (400\,\underline{i} - 600\,\underline{k}) + (800\,\underline{j} - 600\,\underline{k}) = 400\,\underline{i} + 800\,\underline{j} - 1200\,\underline{k}\ [\text{N}]$$

$$\underline{r}_{o2} \times (\underline{F}_2 + \underline{F}_3) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 400 & 800 & -1200 \end{vmatrix} = \underline{i}(-4800-0) - \underline{j}(-2400-0) + \underline{k}(1600-1600) =$$

$$= -4800\,\underline{i} + 2400\,\underline{j}\ [\text{Nm}]$$

$$\boxed{\underline{M}_o = \underline{0} + \left[(-1800\,\underline{i}) + (-4800\,\underline{i} + 2400\,\underline{j})\right] = -6600\,\underline{i} + 2400\,\underline{j}\ [\text{Nm}]}$$

$$\boxed{M_t = \underline{M}_o \cdot \underline{e}_t = (-6600\,\underline{i} + 2400\,\underline{j})\,\frac{2\,\underline{i} + 4\,\underline{j} + 3\,\underline{k}}{\sqrt{2^2+4^2+3^2}} = \frac{-13200 + 9600 + 0}{\sqrt{29}} = -668{,}5\ \text{Nm}}$$

$$\underline{M}_F = \underline{M}_{\parallel} = \frac{\underline{F}\cdot\underline{M}_0}{\underline{F}^2}\cdot\underline{F}$$

$$\underline{F}\cdot\underline{M}_0 = \left(400\,\underline{i}+1400\,\underline{j}-1200\,\underline{k}\right)\cdot\left(-6600\,\underline{i}+2400\,\underline{j}\right) =$$

$$= -2{,}64\cdot 10^6 + 3{,}36\cdot 10^6 + 0 = 7{,}2\cdot 10^5$$

$$\underline{F}^2 = 400^2 + 1400^2 + 1200^2 = 3{,}56\cdot 10^6$$

$$\boxed{\underline{M}_F = \frac{7{,}2\cdot 10^5}{3{,}56\cdot 10^6}\left(400\,\underline{i}+1400\,\underline{j}-1200\,\underline{k}\right) = 80{,}90\,\underline{i} + 283{,}1\,\underline{j} - 242{,}7\,\underline{k}\ [Nm]}$$

$$\underline{r}_P = \frac{\underline{F}\times\underline{M}_0}{\underline{F}^2}$$

$$\underline{F}\times\underline{M}_0 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 400 & 1400 & -1200 \\ -6600 & 2400 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}\left(0+2{,}88\cdot 10^6\right) - \underline{j}\left(0-7{,}92\cdot 10^6\right) + \underline{k}\left(9{,}6\cdot 10^5 + 9{,}24\cdot 10^6\right) =$$

$$= 2{,}88\cdot 10^6\,\underline{i} + 7{,}92\cdot 10^6\,\underline{j} + 1{,}02\cdot 10^7\,\underline{k}\ [Nm]$$

$$\boxed{\underline{r}_P = \frac{\left(2{,}88\,\underline{i} + 7{,}92\,\underline{j} + 10{,}2\,\underline{k}\right)\cdot 10^6}{3{,}56\cdot 10^6} = 0{,}8090\,\underline{i} + 2{,}225\,\underline{j} + 2{,}865\,\underline{k}\ [m]}$$

Megjegyzés:
Mivel a 2-es és a 3-as erő hatásvonala metsződik, csak egy helyvektort írtunk fel, és a kettő eredőjével számoltuk a vektoriális szorzatot. Így megspóroltunk egy determinánsos számítást.
Az előbbi trükköt az 1-es és a 2-es erő összevonásával is megtehettük volna, mert azoknak is metsződik a hatásvonaluk.