

23163

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
ÉPÍTŐMÉRNÖKI KAR, SZAKMÉRNÖKI TAGOZAT
MÉRNÖKI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET KIADVÁNYA
M. 2.

Cholnoky Tibor
egyetemi tanár

RUGALMASSÁGTAN

II. RÉSZ

KÉZIRAT

23163

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST 1969

20,- Ft

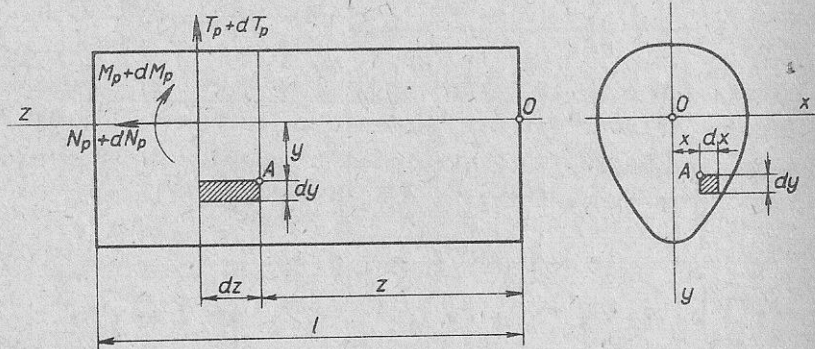
Ugyanilyen módon háromszoros integrál alakjában írhatjuk fel az egész testre vonatkozólag az /59,8/ alapján a saját térfogat-változási munkát, továbbá az /59,9/-/59,15/ képletek bármelyikével a saját torzítási munkát.

60.§ Az idegen alakváltozási munka számítása síkbeli tömör tartó esetén

A/ Az 58.§-ban az idegen alakváltozási munkát a $/P/ \cong 0$ dinámrendszer hatására keletkező feszültségi tenzortér, továbbá a $/Q/$ oknak megfelelő alakváltozási tenzortér ismeretében határoztuk meg, tehát hat feszültségi alkotónak, mint függvényeknek és hat alakváltozási elemnek, mint függvényeknek a számításba vételével.

Síkbeli tömör tartók esetében könnyebben elvégezhetővé válik ez a számítás, ha az igénybevételeket és a tartó alakváltozását egyszerűbben jellemző függvények nyernek bevezetést, amelyek mind egyváltozós függvények.

A 78. ábra mutat oldalnézetben és keresztmetszetben egy egyenestengelyű primatikus rudat, szimmetrikus keresztmetszettel. A ruda ható külső $/P/ \cong 0$ dinámrendszert nem tüntettük fel, de meghatározva képzeljük az igénybevételi ábrákat, illetőleg igénybevételi függvényeket.



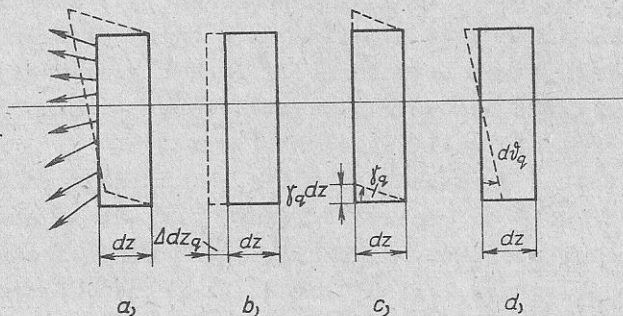
78. ábra

Ismerjük tehát a keresztmetszetre ható igénybevételeket: a derék-erőt /normálerőt/, a nyíróerőt és a hajlítónyomatékot a z függvényében:

$$N_p = \varphi_1/z/ \quad T_p = \varphi_2/z/ \quad M_p = \varphi_3/z/ \quad /60,1/$$

Ezeket az igénybevételeket pozitív értelmezésüknek megfelelően tüntettük fel a 78. ábrán a $z+dz$ koordinátájú keresztmetszetben.

Az idegen /Q/ ok folytán bekövetkező alakváltozások legyenek olyanok, hogy az eredetileg sík keresztmetszetek alakváltozás után is síkok és a keresztmetszeti síkidomok önmagukkal egybevéágók maradjanak, vagyis a Bernoulli-Navier-féle feltételezés érvényesüljön. A $z+dz$ koordinátájú sikkérsztmetszetnek a z koordinátájú keresztmetszethez képest történő elmozdulását mutatja torzítva a 79.a/ ábra.



79. ábra

Ez mindig három elmozdulásösszetevőre bontható. A b/ ábra mutatja a dz hosszúságú rudelem Δdz_q nyulását, ami a keresztmetszetnek a rudtengely irányába eső eltolódását jelenti. Az erre merőleges eltolódás a γ_q szögváltozás miatt jön létre és $\gamma_q dz$ nagyságú. Ezt mutatja a c/ ábra. Végül a relatív $d\varphi_q$ elfordulást a d/ ábrán látjuk. Valamennyi elmozdulásadat úgy van feltüntetve, ahogyan azokat pozitív előjelűeknek számítjuk.

A /Q/ ok folytán létrejövő alakváltozások ismereteseek, ha a fenti eltolódásoknak és elfordulásnak a z tengely szerint vett fajlagos értékei, tehát a fajlagos nyulás, a szögváltozás és a fajlagos elfordulás a z függvényében adottak a következők szerint:

$$\frac{\Delta dz_q}{dz} = \varepsilon_q = \psi_1/z/$$

$$\frac{\gamma_q dz}{dz} = \gamma_q = \psi_2/z/$$

/60,2/

$$\frac{d\varphi_q}{dz} = \tau_q = \psi_3/z/$$

Számítsuk ki ezután a 78. ábrán vázolt egész rudra vonatkozó L_a^{pq} idegen alakváltozási munkát. Először határozzuk meg azt a dL_a^{pq} alakváltozási munkát, amely a rudból kivágott dz vastagságú, lemezhez tartozik. Az ábrán feltüntetettünk e lemezben egy dx dy dz köbtartalmu elemi hasábot. Az 58.§ B/ részében ismertetett eljárást követve, a számításnál alapul vett A sarokpontokat valamennyi hasábnál módunk van a z koordinátájú keresztmetszet síkján felvenni, sőt egy-egy hasábsor két végén levő hasáboknál úgy, hogy ezek az A pontok a rudat határoló felületen is rajta legyenek. Ezzel elértük azt, hogy az elemi hasáboknak a z koordinátájú keresztmetszet síkjában levő oldallapjaira ható belső erők, továbbá a rud külső felületére ható felületi erők a munkaösszeg számításakor figyelmen kívül hagyhatók. Természetesen - amint láttuk - a térfogati erőket sem kell figyelembe venni.

A kis hasábok egymással érintkező oldallapjaira ható elemi belső erők az akció és reakció axiómája alapján is csak nyilban különböznek egymástól, de - minthogy az alakváltozások létrejötté után is e lapok egymás mellett maradnak - elmozdulásuk ugyanaz. Két ilyen elemi erő munkája tehát csak előjelben különbözik egymástól, így a munkaösszeg számításakor páronként kiesnek.

Arra az eredményre jutottunk tehát, hogy a dL_a^{pq} számításakor csak a z+dz koordinátájú keresztmetszet síkjában lévő hasáb oldallapokra, tehát a lemeznek erre a határoló síkjára működő belső erők munkaösszegét kell számításba vennünk és csak is a z koordinátájú keresztmetszet síkjához viszonyítva bekövetkező elmozdulások, másszóval az ismertetett alakváltozási elemek hatására. Ezt a megoszló térbeli belső erőrendszert érzékeltettük sok kis erő felrajzolásával a 79.a/ ábrán. A keresztmetszeti síkidomról feltettük, hogy önmagával egybevágó marad. Elmozdulása tehát merev testszerűen következik be, az 56.§ értelmében a rá ható belső erők a munkaösszeg számításakor a velük egyenértékű igénybevételekkel helyettesíthetők. Az $N_p + dN_p$ igénybevétel csak a nyulás, a $T_p + dT_p$ igénybevétel csak a szögváltozás, végül az $M_p + dM_p$ igénybevétel csak az elfordulás miatt végez munkát. Így a lemezre vonatkozó összes alakváltozási munka, - a pozitív értelmezésekből származó előjelekre is figyelemmel -:

$$dL_a^{pq} = /N_p + dN_p/ \quad \varepsilon_q \quad dz + /T_p + dT_p/ \quad \gamma_q \quad dz - /M_p + dM_p/ t_q \quad dz$$

A z koordinátatengely szerint vett fajlagos alakváltozási munka a következőképpen értelmezhető, figyelembe véve a $dz \rightarrow 0$ és $dN_p \rightarrow 0$, $dT_p \rightarrow 0$, $dM_p \rightarrow 0$ határátmeneteket:

$$\frac{dI_a^{pq}}{dz} = N_p \varepsilon_q + T_p \gamma_q - M_p t_q$$

E fajlagos munkának a dimenziója cm kg/cm

Végül az egész rudra vonatkozó idegen alakváltozási munka:

$$I_a^{pq} = \int_0^l N_p \varepsilon_q dz + \int_0^l T_p \gamma_q dz - \int_0^l M_p t_q dz \quad /60,3/$$

Ez a munka tehát a /60,1/ és /60,2/ alatti hat függvény ismeretében valóban könnyen számítható. Megjegyezzük, hogy ha a függvények esetleg egyes keresztmetszetekben nem folytonosak, úgy az ilyen keresztmetszetekkel a rudat szakaszokra osztjuk, az egyes szakaszokra a fentiek szerint kiszámítjuk az alakváltozási munkát és ezeket összegezzük.

B/ Igen gyakran előfordul, hogy az alakváltozásokat létrehozó idegen /Q/ ok egy /Q/ $\neq 0$ dinámrendszer. Ekkor ismerjük az ebből számítható N_q , T_q , M_q igénybevételeket a z függvényében. Ezekből a /60,2/ alatti három függvény előállítható.

Elsősorban a normális erő esetében: $\sigma_q = \frac{N_q}{F} = E \varepsilon_q$. Így:

$$\varepsilon_q = \frac{N_q}{EF} \quad /60,4/$$

Itt F a keresztmetszeti síkidom területe.

A nyíróerőkből a γ_q meghatározása nem ilyen egyszerű, mert a keresztmetszetben a nyíróerővel párhuzamos nyírófeszültségi alkotók nem egyenletes eloszlásuak. E τ_q feszültségi alkotó nagysága - előjeltől eltekintve - a Zsuravszkij-féle képlettel számítható. A 80.a/ ábrán is feltüntetett valamely y koordinátájú pontban:

$$\tau_q = \frac{T_q S'_x}{J_x S} \quad /60,5/$$

Itt J_x a keresztmetszeti síkidom tehetetlenségi nyomatéka az x tengelyre, S_x pedig a keresztmetszeti síkidom vonalkázott részének sztatikai nyomatéka az x tengelyre. Nyilvánvaló, hogy egy másik - az ábrán is feltüntetett - y_1 koordinátájú pontban más τ_{q1} működik. Ha tehát a dz vastagságú lemezt most is különálló kis $dx dy dz$ köbtartalmu elemi hasábok együtteségének képzeljük, amelyek közül kettőt a 80.b/ ábrán ki is rajzoltunk - akkor ezek általában mind más és más szögváltozást szenvednek az ottani τ_q értékeknek megfelelően.

Az elemi hasábok azonban nem torzulhatnak el egymástól függetlenül, hiszen a $z+dz$ koordinátájú keresztmetszet is merev lapként mozdul el feltételezésünk szerint. A kisebb és nagyobb szögváltozások helyett tehát bizonyos γ_q átlagos szögváltozás jön létre az egész dz vastagságú lemezre vonatkozólag és valamennyi hasábnakugyanaz lesz a szögváltozása, úgy amint azt a 80.c/ ábrán láthatjuk. Ezt az átlagos szögváltozást annak a követelmények a figyelembevételével szokás meghatározni, hogy a nyirófeszültségekből származó belső erők munkaösszege a dz vastagságú lemeznél a $z + dz$ koordinátájú keresztmetszet merev lapként történő elmozdulásakor - tehát a c/ ábra esetén - ugyanannyi legyen, mint ha az egyes elemi hasábok a b/ ábrán feltüntetett módon egymástól függetlenül torzultak volna el. Első esetben a merevségre tekintettel a nyirófeszültségekből származó belső erők az eredőjükkel, a T_q nyiróerővel helyettesíthetők. Így a munkaegyenlőség:

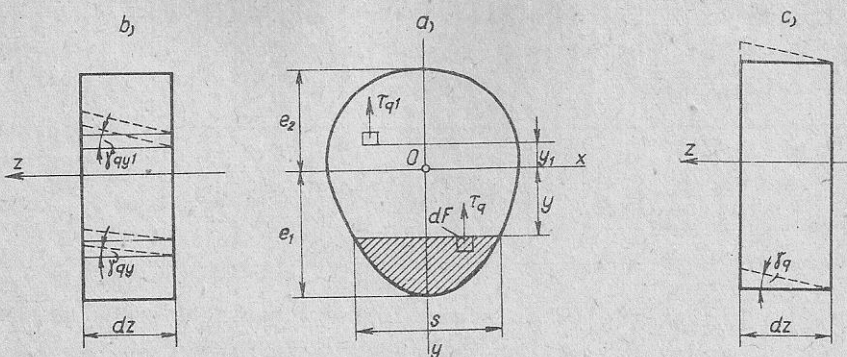
$$T_q \gamma_q dz = \int_{/F/} \tau_q dF \gamma_{qy} dz$$

Mindkét oldalt dz -vel osztva és figyelembe véve, hogy $\gamma_{qy} = \frac{\tau_q}{G}$:

$$\gamma_q = \frac{1}{GT_q} \int_{/F/} \tau_q^2 dF$$

A /60,5/ behelyettesítésével és a számlálót, valamint a nevezőt is F -fel szorozva:

$$\gamma_q = \frac{T_q}{GF} \frac{F}{J_x^2} \int_{/F/} \frac{S_x'^2}{s^2} dF$$



80. ábra

A képletben szerepel a következő mennyiség:

$$\varrho = \frac{F}{J_x^2} \int_{/F/} \frac{S_x'^2}{s^2} dF \quad /60,6/$$

Ez a dimenzió nélküli szám a keresztmetszetnek csak az alaktól függő geometriai adata, a különböző alakú keresztmetszeti síkidomokhoz a határozott integrálás elvégzésével egyszerűen kiszámítható. Például bármely derékszögű négyszög keresztmetszet esetén $\varrho = 1,2$.

Ennek bevezetése után:

$$\gamma_q = \varrho \frac{T_q}{GF} \quad /60,7/$$

Végül az M_q hajlítónyomatékból számíthatjuk t_q értékét, figyelembe véve a /60,2/ harmadik képletét, továbbá az egyszerű egyenes hajlítás ismert képletét, amely szerint

$$\frac{d\gamma_q}{dz} = - \frac{M_q}{EJ_x}$$

Igy:

$$t_q = - \frac{M_q}{EJ_x} \quad /60,8/$$

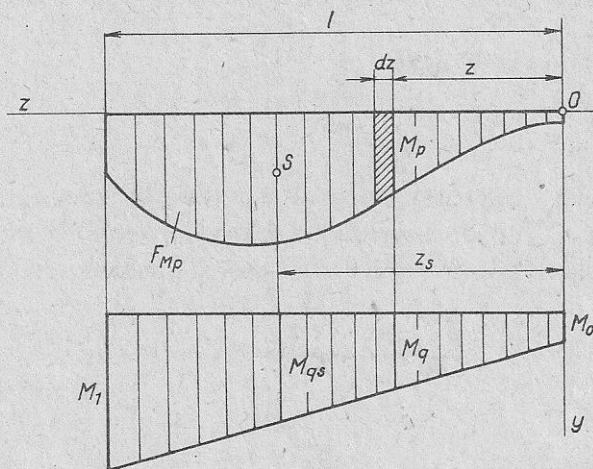
Ezután a /60,3/-ba be kell csak helyettesítenünk a /60,4/, /60,7/ és /60,8/ képleteket. Így az egész rudra vonatkozó idegen alakváltozási munka:

$$L_a^{pq} = \int_0^l \frac{N_p N_q}{EF} dz + \int_0^l \varrho \frac{T_p T_q}{GF} dz + \int_0^l \frac{M_p M_q}{EJ_x} dz \quad /60,9/$$

C/ Az utóbbi képletben szereplő határozott integrálok bármelyike különösen egyszerűen meghatározható akkor, ha az abban szereplő két függvény közül legalább az egyik lineáris. Például a harmadik integrálban szereplő M_q legyen z -nek lineáris függvénye. A 81. ábrán az M_p és M_q függvényeket ennek megfelelően tüntettük fel diagrammok alakjában. Amint tudjuk, ezek a diagrammok a nyomatéki ábrák. Ezeket ismerjük. Most ha M_q lineáris, akkor valamilyen A és B állandókkal így írható fel: $M_q = A+Bz$. Ha $z = 0$, akkor $M_q = M_0$, így: $A = M_0$. Ha viszont $z = l$, akkor $M_q = M_1$, ezért:

$$B = \frac{M_1 - M_0}{l}. \text{ Tehát:}$$

$$M_q = M_0 + \frac{M_1 - M_0}{l} z. \quad /60,10/$$



81. ábra

Ezt az integrálba helyettesítve:

$$\int_0^l M_p M_q dz = M_0 \int_0^l M_p dz + \frac{M_1 - M_0}{l} \int_0^l M_p z dz.$$

De: $\int_0^l M_p dz = F_{Mp}$ az M_p nyomatéki ábra területe /például tm^2 dimenzióval/. Viszont: $\int_0^l M_p z dz = S_{Mp}$ az M_p nyomatéki ábrának, mint síkidomnak sztatikai nyomatéka az y tengelyre /például tm^3 dimenzióval/. A sztatikai nyomatékot azonban megkapjuk a nyomatéki ábra területének és súlyponti z_S koordinátájának szorzataként:

$$S_{Mp} = F_{Mp} z_S.$$

Mindezt behelyettesítve:

$$\int_0^l M_p M_q dz = F_{Mp} /M_0 + \frac{M_1 - M_0}{l} z_S/.$$

A zárjeles mennyiség a /60,10/ szerint nem más, mint az M_q ábra ordinátája, vagyis az M_q hajlítónyomaték az M_p ábra S súlypontján átmenő rudkeresztmetszetben. Ezt M_{qS} -sel jelölve a /60,9/ képletben szereplő utolsó határozott integrál lesz:

$$\int_0^l \frac{M_p M_q}{EJ_x} dz = \frac{F_{Mp} M_{qS}}{EJ_x} \quad /60,11/$$

Különösen egyszerű az ismertetett eljárás akkor, ha az M_p nyomatéki ábra súlypontja könnyen kijelölhető. Ilyen esetről van szó például, ha az M_p nyomaték is lineáris függvénye z -nek.

Természetesen értelemszerűen az eddigiek szerint kell eljárni akkor is, ha nem M_q , hanem M_p a lineáris függvény.

Végül megemlítjük, hogy a szóban levő határozott integrálok kiszámítása egyszerűsíthető valamelyik igénybevételi ábra megfelelő részekből való összetételének, összeadásának, egymásra halmozásának elképzelésével is, a tagonként történő integrálás tényleges, vagy a fentiek szerint egyszerűsített végrehajtásával.

5-1. példa. Az 5-12a. ábrán vázolt keresztmetszetre a $0 \leq s \leq b$ tartományban $z_s(s) = -h/2$, $A_0(s) = ts$, tehát $S_y(s) = hts/2$. A függőleges gerincet valamely z helyen elvágva az A_0 felület két részből áll: a vízszintes ω bt felületéből, amelynek a súlyponti koordinátája $-h/2$, és a $(h/2 + z)t$ felületéből, amelynek a súlyponti koordinátája:

$$-\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}h + z\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}h + z\right).$$

Ezzel

$$\begin{aligned} S_y(z) &= \frac{1}{2}htb - \left(\frac{1}{2}h + z\right)t \cdot \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}h + z\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(hb + \frac{1}{4}h^2 - z^2\right)t. \end{aligned}$$

5.4.3 Nyírási alakváltozási tényező

Vékony, $t(s)$ vastagságú gerincekből álló, egyszerűen határolt keresztmetszetekre a κ_y és κ_z nyírási alakváltozási tényezőt a következőképpen definiáljuk (integrálás az összes gerincen):

$$\kappa_y = \frac{A}{I_z^2} \int \frac{S_y^2(s)}{t(s)} ds, \quad \kappa_z = \frac{A}{I_y^2} \int \frac{S_z^2(s)}{t(s)} ds. \quad (31)$$

Számértékek az 5-3. táblázatban.

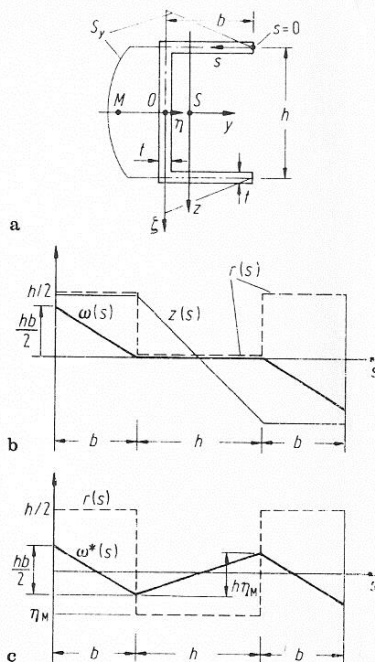
5.4.4 Nyírási középpont vagy tau-középpont*

Ha a rúd keresztmetszetének szimmetriatengelyei vannak, akkor az M nyírási középpont ezeken helyezkedik el. L és T szelvények esetében, és általában olyan keresztmetszeteknél, amelyek egyenes, vékony, egyetlen pontból kiinduló gerincekből állnak, az M pont ebben a pontban van. Vékony gerincből álló, egyszerűen határolt, tetszőleges keresztmetszet esetén (5-11. ábra) az M pont koordinátái az y, z rendszerrel párhuzamos, egyébként tetszőlegesen megválasztott η, ζ rendszerben (az integrálás kiterjed valamennyi gerincen):

$$\left. \begin{aligned} \eta_M &= -(1/I_z) \int \omega(s)z(s)t(s) ds, \\ \zeta_M &= (1/I_y) \int \omega(s)y(s)t(s) ds. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Itt $y(s)$ és $z(s)$ az s helyen levő pont y és z koordinátája, továbbá

* (Itt és a következő fejezetekben a szerző a vékonyfalú tartó keresztmetszetének valamennyi elemét *gerincnek* nevezi. eltérően például az acélszerkezeti gyakorlatról, ahol megkülönböztetnek *gerincet* és *övet* – a lektor megjegyzése.)



E5-12. ábra: a) $S_y(s)$ értékei a fal középvonalára merőleges irányban vannak felmérve. Az η, ζ rendszernek és a nyírófeszültség M középpontjának (a z -tengely pontnak) az értelmezése ld. az 5.4.4. pontot. b) $\omega(s)$ és $z(s)$ az a ábrán vázolt szelvény segédfüggvényei a (32) és (33) összefüggéshez. c) $r(s)$ és $\omega^*(s)$ ugyanennek a szelvénynek a segédfüggvényei a (37)-hez

$$\omega(s) = - \int r(\bar{s}) d\bar{s} + \omega_0$$

(integrálás az $A_0(s)$ összes gerincére). $r(s)$ annak az $r(s)$ vektornak az előjeles hossza, amelyet az η, ζ rendszer O kezdőpontjából indul, és merőleges a gerinc középvonalának s pontban húzott érintőjére. $r(s)$ pozitív (negatív), ha az $r \times ds$ a pozitív (negatív) x -tengely irányába mutat. Az ω_0 tetszőlegesen választható meg. Az O pont és az ω_0 célszerű megválasztásával a számítás egyszerűsödik.

E5-3. táblázat. κ_z nyírási tényezők rúdkeresztmetszeteknél

$\kappa_z = 1.2$	$\kappa_z = 1.33$	$\kappa_z = 2.0 \dots 2.4$
$\kappa_z = 2.0 \dots 2.4$	$\kappa_z = 3 \dots 5$	$\kappa_z = 3 \dots 4$